

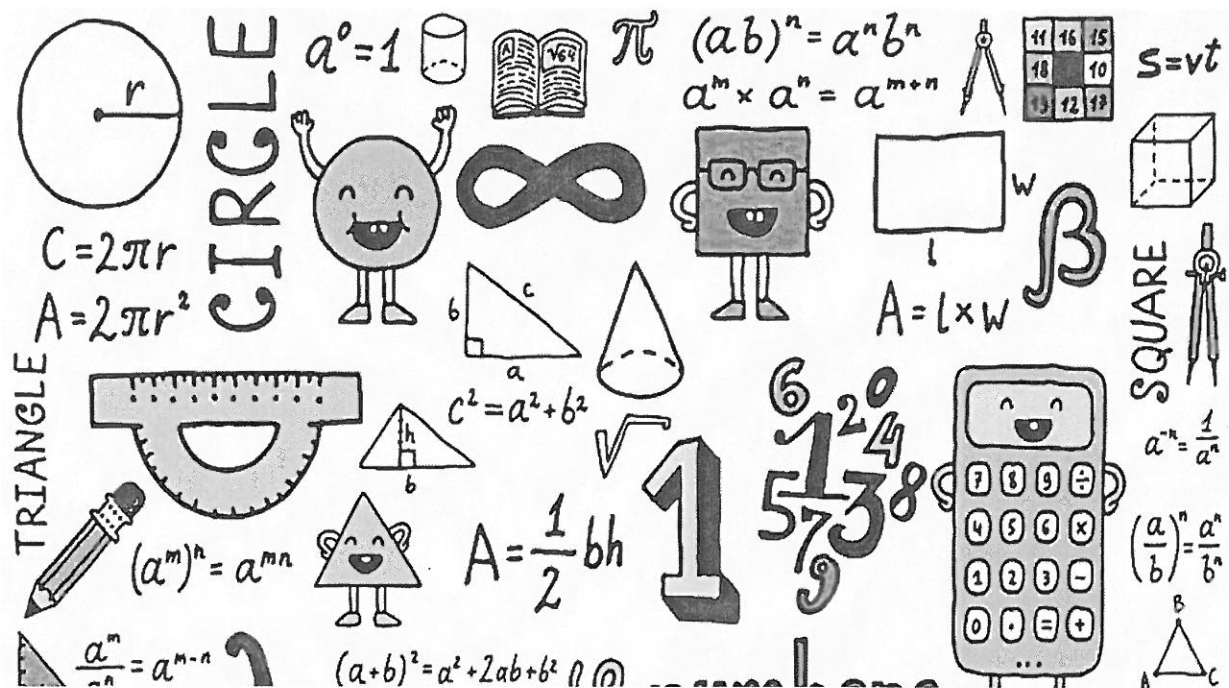
# GHID DE PREGĂTIRE REMEDIALĂ

## PRO BAC

### „Minte absorbantă și mediul de învățare”

## MODULUL 2

### „MATEMATICA PE ÎNȚELESUL TUTUROR”



**Proiectul privind Învățământul Secundar (ROSE)  
Schema de Granturi pentru Licee**

**Beneficiar:**

**LICEUL TEHNOLOGIC DE TRANSPORTURI SI CONSTRUCTII IAȘI**

**Titlul subproiectului:**

***PRIN EDUCATIE SI PROSOCIALIZARE NE CONSTRUIM CARIERA***

**Acord de grant nr. 438/SGL/RII din 01.10.2018**

**Activitatea I.1. : PRO BAC**

**„MINTE ABSORBANTĂ ȘI MEDIUL DE ÎNVĂȚARE”**

**Coordonatori:**

**Prof. Irina Veronica BĂLĂU**

**Prof. dr. ing. Anca Eugentina ROZNOVAN**

**Prof. dr. ing. Lăcrămioara IFTODE**

## CUPRINS

TEST DE EVALUARE ÎNICIALĂ .....	4
Tema 1 – OPERAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE .....	5
Tema 2 – FUNCȚII ȘI ECUAȚII EXPONENȚIALE, LOGARITMICE SI IRATIONALE .....	7
Tema 3 – FUNCȚIA DE GRADUL I ȘI DE GRADUL AL II-LEA .....	11
Tema 4 – PROBABILITĂȚI, MATEMATICI FINANCIARE .....	13
Tema 5 – PLANUL CARTEZIAN .....	16
Tema 6 – TRIGONOMETRIE .....	19
Tema 7 – MATRICE. DETERMINANȚI .....	32
Tema 8 – LEGI DE COMPOZIȚIE .....	38
Tema 9 – LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE. ASIMPTOTE .....	44
9.1. Limite de funcții .....	45
9.2. Limite remarcabile și fundamentale de funcții reale .....	45
9.3. Funcții continue .....	49
9.4. Asimptote .....	50
Tema 10 – DERIVABILITATE. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR .....	53
Tema 11 – PRIMITIVE. METODE DE CALCUL .....	59
11.1. Probleme de existența a primitivelor.....	59
11.2. Calcul integral.....	62
REZOLVAREA TESTELOR DE TIP BAC .....	79



**TEST DE EVALUARE ÎNȚIALĂ****MATEMATICĂ CLASA A XI-A / A XII-A****Subiectul I****(40 puncte)**

- |    |  |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-1, (3), \sqrt{25}]$            |
| 5p | 2. Aflați valoarea expresiei $2x - 3y - 6 z $ pentru $x = -4, y = -5, z = -3$ .      |
| 5p | 3. Rezultatul calculului $\frac{3}{15} - \frac{1}{10} : 2$ este...                   |
| 5p | 4. Calculați: $1\frac{2}{7} : 0, (3) + 1, 2^2$ .                                     |
| 5p | 5. Determinați soluțiile reale ale ecuației $18 - 3a = 6$ .                          |
| 5p | 6. Determinați soluțiile întregi ale ecuației $5x^2 - 3x = 2$ .                      |
| 5p | 7. Folosind proprietățile logaritmilor, calculați $\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9$ . |
| 5p | 8. Soluția ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$ este...                                     |

**Subiectul II****(50 puncte)**

- |     |  |
|-----|--|
| 10p | 1. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - 4$ .  |
| 5p  | a) Să se calculeze $f(-2) + f(2)$ .  |
| 5p  | b) Rezolvați în $R$ inecuația $2f(x) - 8x \leq 36$ ;   |
| 5p  | 2. După o reducere de 20% prețul unui produs este de 320 lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.                                     |
| 5p  | 3. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ știind că $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$ .   |
| 5p  | 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5, AC = 6, BC = 7$ . Să se calculeze $\cos A$ .  |
| 10p | 5. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{2+x} = x$ .   |
| 10p | 6. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1, 1), B(3, -2), C(3, 1)$ .  |
| 10p | a) Să se determine distanța de la A la C.  |
| 10p | b) Determinați ecuația dreptei AB.   |
| 10p | 7. Calculați a) $(3\sqrt{2} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2} - 2\sqrt{7}) =$<br>b) $2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ =$ |

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu
- Timpul efectiv de lucru este de 50 minute

## OPERATII IN MULȚIMEA NUMERELOR REALE

### Radicali

**Definiție:** Numim radical de ordin  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  din numărul pozitiv  $a$  și notăm  $\sqrt[n]{a}$  ca fiind acel număr pozitiv  $x$  unic cu proprietatea  $x^n = a$ .

**Observație:** Dacă  $x \in \mathbb{N}$ , atunci pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , dacă  $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$ , atunci  $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Proprietățile radicalului:** Următoarele relații sunt adevărate pentru orice  $a, b \geq 0$  și  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \geq 2$ .

$$\text{P1. } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \text{P2. } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0; \quad \text{P3. } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}; \quad \text{P4. } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

**Observație:** Dacă  $n$  este impar, putem calcula  $\sqrt[n]{x}$ , și dacă  $x < 0$ , în aceste condiții  $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ .

**Observație:** Avem  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ , dar  $\sqrt[n]{x} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$ .

### Puteri cu exponent real

**Observație:** Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*; \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*; \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, x > 0, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

**Proprietățile ridicării la putere:** Pentru orice  $x, y > 0$  și orice  $p, r \in \mathbb{R}$ , au loc relațiile:

$$\text{P1. } x^p x^q = x^{p+q}; \quad \text{P2. } \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \quad \text{P3. } (x^p)^q = x^{pq}; \quad \text{P4. } (xy)^p = x^p y^p.$$

### Logaritmi

**Definiție.** Fie  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$ . Soluția (unică) a ecuației  $a^x = b$  se numește **logaritm în baza  $a$  din  $b$**  și se notează cu  $\log_a b$ .

**Proprietățile logaritmului:** Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice  $a, b, x, y > 0$ ,  $a, b \neq 1$ :

$$\text{P1. } \log_a xy = \log_a x + \log_a y; \quad \text{P2. } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\text{P3. } \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \alpha \in \mathbb{R}; \quad \text{P4. } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

**Observație:** Dacă  $a, b \in \mathbb{N}$  sunt numere prime diferite, atunci  $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

## FISA DE LUCRU

Calculați  $(-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)$ .

Calculați  $(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{100}$ .

Calculați  $8^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ .

Calculați  $\sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}$ .

Calculați  $\log_{11} 11 + \log_7 \frac{1}{7}$ .

Calculați  $\log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000$ .

Ordonăți crescător numerele  $a = -\sqrt[3]{27}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{16}$ ,  $c = -2$ .

Demonstrați că  $\log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

Demonstrați că  $\log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}$ .

Dacă  $\log_2 3 = a$ , demonstrați că  $\log_2 6 = 1 + a$ .

### Testul 1

1. Demonstrați că  $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + (\sqrt{3})^2 = 0$ .
2. Demonstrați că numărul  $a = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}$  este natural.
3. Demonstrați că  $\lg 20 + \lg 50 = 3$ .
4. Demonstrați că  $\log_3 5 + \log_3 7 < \log_3 72 - \log_3 2$ .
5. Ordonăți crescător numerele  $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ,  $b = \sqrt[3]{-125}$  și  $c = \lg \frac{1}{1000}$ .
6. Demonstrați că  $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$ .

### Testul 2\*

1. Demonstrați că  $\sqrt[3]{-216} + \sqrt{144} = \log_3 729$ .
2. Demonstrați că  $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8} = 0$ .
3. Demonstrați că numerele  $a = 10^{\lg 7}$  și  $b = \sqrt[3]{343}$  sunt egale.
4. Arătați că numărul  $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$  este rațional.
5. Demonstrați că  $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 = \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$ .
6. Demonstrați că  $\sqrt{10} + \sqrt{12} < 7$ .

## TEMA 2

### FUNCTII SI ECUATII EXPONENTIALE, LOGARITMICE SI IRATIONALE

### *Funcții bijective*

**Definiție:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  se numește:

- funcție **injectivă**, dacă pentru orice  $u, v \in A$ , cu  $u \neq v$ , avem  $f(u) \neq f(v)$ ;
- funcție **surjectivă**, dacă pentru orice  $w \in B$  există  $u \in A$ , astfel încât  $f(u) = w$ ;
- funcție **bijectivă**, dacă este injectivă și surjectivă.

**Proprietăți ale funcțiilor injective:**

**P1.** Funcția  $f: A \rightarrow B$  este injectivă dacă și numai dacă pentru  $u, v \in A$ , cu  $f(u) = f(v)$ , avem  $u = v$ ;

**P2.** Orice funcție  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  strict monotonă este injectivă.

**Proprietăți ale funcțiilor surjective:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  este surjectivă dacă și numai dacă  $\text{Im } f = B$ .

**Proprietăți ale funcțiilor bijective:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  este bijectivă dacă și numai dacă, pentru orice  $w \in B$ , ecuația  $f(x) = w$  admite o singură soluție  $x \in A$ .

### *Funcții inversabile*

**Definiție:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  se numește **funcție inversabilă** dacă există o funcție  $g: B \rightarrow A$ , astfel încât  $(g \circ f)(x) = x$ , pentru orice  $x \in A$ , și  $(f \circ g)(y) = y$ , pentru orice  $y \in B$ .

**Observații:**

- Dacă există, funcția  $g$  se numește **inversa** funcției  $f$  și se notează  $f^{-1}$ .
- Avem relația  $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ , cu  $x \in A$  și  $y \in B$ .

**Teoremă:** O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

### *Funcții numerice*

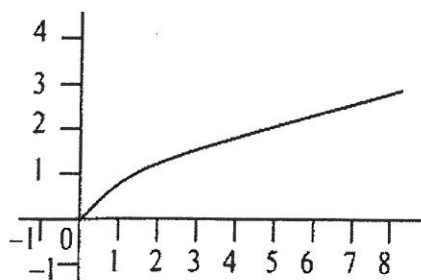
#### **Funcția rațională**

- funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ , unde  $g, h$  sunt două funcții polinomiale;
- domeniul  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$ .

#### **Funcția radical**

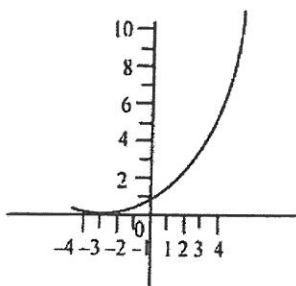
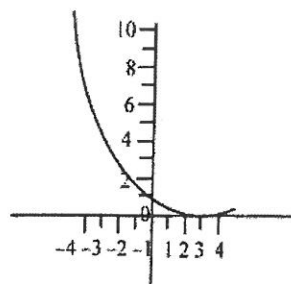
- funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;
- domeniul  $D$  este egal cu  $\mathbb{R}$  dacă  $n$  este impar și cu  $[0, \infty)$  dacă  $n$  este par;
- funcția este strict crescătoare și injectivă.

$n$  par

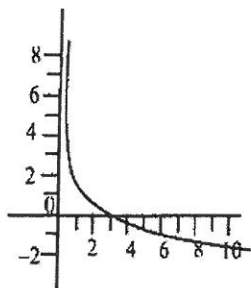
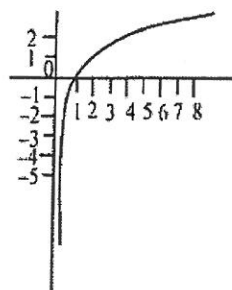


**Funcția exponențială**

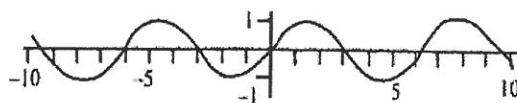
- funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ;
- este strict crescătoare dacă  $a \in (1, \infty)$  și strict descrescătoare dacă  $a \in (0, 1)$ ;
- este injectivă și strict pozitivă.

 $a \in (1, \infty)$  $a \in (0, 1)$ **Funcția logaritmică**

- funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ;
- este strict crescătoare dacă  $a \in (1, \infty)$  și strict descrescătoare  $a \in (0, 1)$ ;
- este injectivă.

 $a \in (1, \infty)$  $a \in (0, 1)$ **Funcțiile sinus și arcsinus**Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ :

- este continuă și derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ;
- este periodică cu perioada principală  $T = 2\pi$ ;
- este mărginită și  $\text{Im } f = [-1, 1]$ .

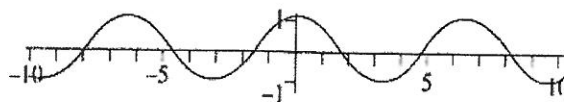


Restricția  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f^{-1}(y) = \arcsin y$ .

**Funcțiile cosinus și arccosinus**Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ :

- este continuă și derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ;
- este periodică cu perioada principală  $T = 2\pi$ ;
- este mărginită și  $\text{Im } f = [-1, 1]$ .



Restricția  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$  este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ,  $f^{-1}(y) = \arccos y$ .

**Propoziție:** Pentru orice  $y \in [-1, 1]$ , avem  $\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$ .

### Funcțiile tangență și arctangență

Funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , unde  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ :

- este periodică de perioadă principală  $T = \pi$ ;
- este surjectivă.

Restricția  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ .

### Funcțiile cotangență și arccotangență

Funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , unde  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ :

- este periodică de perioadă principală  $T = \pi$ ;
- este surjectivă.

Restricția  $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg} y$ .

## FISA DE LUCRU

Dacă funcția  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$  este definită prin  $f(1) = 2, f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2$ , arătați că  $f$  nu este injectivă, dar este surjectivă.

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$ , știind că  $f^{-1}(3) = 1$  și  $f^{-1}(5) = 2$ .

Demonstrați că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$  este inversa funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ .

Demonstrați că  $2\sqrt[3]{5} < 3\sqrt[3]{2}$ .

Determinați domeniul maxim de definiție al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ .

Determinați  $x \in [4, \infty)$  pentru care  $\sqrt{3x-12} = 2$ .

Determinați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $3^{2x+1} = 81$ .

Determinați domeniul maxim de definiție al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(4x - 7)$ .

Demonstrați că  $\log_2 15 < 4 \log_2 2$ .

1. Determinați  $x > 1$  pentru care  $\log_3(2x - 2) = 1$ .

## Testul 1

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Calculați  $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$ .
2. Demonstrați că graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg(x^{2012} + 2012x^2 + 1)$  conține originea sistemului de coordonate.
3. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a \cdot 2^{x+1}$ , unde  $a \in (0, \infty)$ . Fie  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  inversa funcției  $g$ . Determinați valoarea numărului  $a$ , știind că  $g(32) = 3$ .
4. Determinați  $x \in \mathbb{R}$ , știind că  $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 3$ .
5. Determinați  $x \in \mathbb{R}$ , știind că  $3^{3x+4} = 9^{x+1}$ .
6. Determinați  $x \in \mathbb{R}$ , știind că  $\log_4(x^2 + 9) = 2$ .

## Testul 2\*

1. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg x$ . Demonstrați că  $\lg\left(\frac{10+100}{2}\right) > \frac{\lg 10 + \lg 100}{2}$ .
2. Demonstrați că funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty), f(x) = x^2 + 1$  este inversabilă și determinați inversa sa.
3. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{x-1} = 3-x$ .
4. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației  $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$ .
5. Determinați mulțimea soluțiilor ecuației  $\log_x(6x-5) = 2$ .
6. Determinați toate numerele reale  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , pentru care  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{3} = \sin x$ .

### TEMA 3

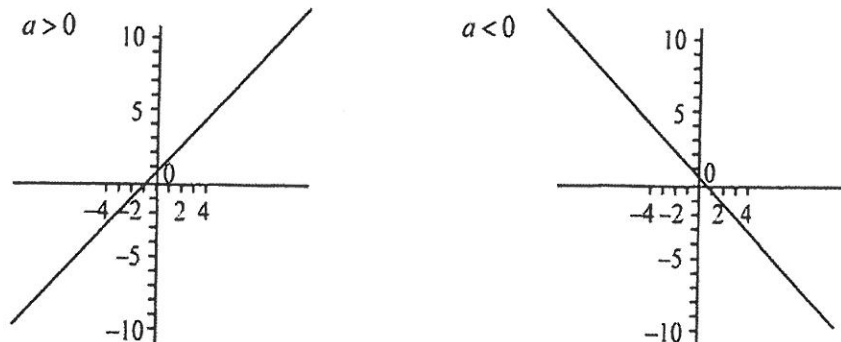
## FUNCTIA DE GRADUL I SI DE GRADUL AL II-LEA

### FUNCTIA DE GRADUL I

**Definiție:** Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$  se numește **funcție de gradul I**.

**Observație:** Funcția de gradul I este strict monotonă, fiind strict crescătoare dacă  $a > 0$  și strict descrescătoare dacă  $a < 0$ .

**Observație:** Imaginea geometrică a funcției de gradul I este o dreaptă (vezi exemplele din figurile următoare).



**Semnul funcției de gradul I:** Este extrem de util în soluționarea inecuațiilor. Pentru o funcție oarecare de gradul I  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , avem tabelul următor:

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$\infty$
$f(x)$	semn opus lui $a$	0	semnul lui $a$

### FUNCTIA SI ECUATIA DE GRADUL II

#### Ecuatia de gradul II cu coeficienti reali

**Forma generală:**  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Numerele  $a, b, c$  se numesc coeficienți, iar  $x$  reprezintă necunoscuta.

**Rezolvare:**

- se calculează **discriminantul** ecuației,  $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- dacă  $\Delta > 0$ , atunci ecuația admite două rădăcini reale diferite, după formula  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- dacă  $\Delta = 0$ , atunci ecuația admite două rădăcini reale egale, după formula  $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ ;
- dacă  $\Delta < 0$ , atunci ecuația nu admite rădăcini reale.

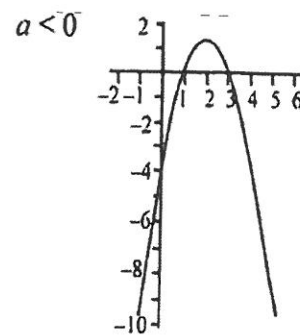
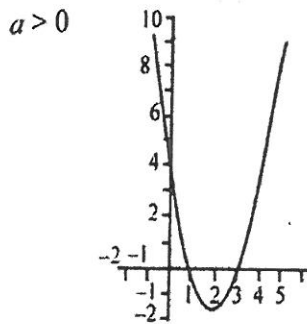
**Relațiile lui Viète:** Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  și

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Funcția de gradul II**

**Definiție:** Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **funcție de gradul al II-lea**.

**Observație:** Imaginea geometrică a graficului este o parabolă (vezi exemplele din figurile următoare).



Dreapta verticală de ecuație  $x = -\frac{b}{2a}$  este axă de simetrie a graficului. Vârful parabolei  $V(x_v, y_v)$

are coordonatele  $x_v = -\frac{b}{2a}$  și  $y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$ . Vârful parabolei este punct de minim dacă  $a > 0$  și punct de maxim dacă  $a < 0$ .

**Semnul funcției de gradul al II-lea:** Este util în soluționarea inecuațiilor. Pentru o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  cu proprietatea  $\Delta > 0$ , dacă notăm cu  $x_1$  și  $x_2$  rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$ , obținem următoarea schemă:

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$\infty$	
$f(x)$	semnul lui $a$	0	semn opus lui $a$	0	semnul lui $a$

## FIȘĂ DE LUCRU

1. Calculați  $f(-1)f(1)$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x+1$
2. Calculați  $f(-1) + f(0) + f(1)$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x$
3. Calculați  $f(-2) + f(2)$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4$
4. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Calculați  $f(-1) + f(1)$
5. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Calculați  $(f(1))^{2016} + (f(0))^{2016}$
6. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctul  $A(1, 5)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + m$
7. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(1, 0)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - a$
8. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(a, 0)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x - 2$
9. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctul  $A(a, 2)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 3$
10. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  cu axa  $OX$
11. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  cu axa  $OX$
12. Determinați numerele reale  $a$ , știind că  $f(a) = a$ , pentru funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$
13. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției cu axa  $OY$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + x + 2015$
14. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 2$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x + 1$ .  
Determinați numărul  $a$  pentru care  $f(a) = g(a)$
15. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = 0$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + m$

## TEMA 4

## PROBABILITĂȚI, MATEMATICI FINANCIARE

*Probabilitati*

**Definiție clasică:** Probabilitatea realizării unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul de cazuri posibile asociate acelui eveniment.

**Observații:**

- probabilitatea este întotdeauna egală cu un număr din intervalul  $[0, 1]$ ;
- evenimentul cu probabilitatea egală cu 0 se numește **evenimentul imposibil**;
- evenimentul cu probabilitatea egală cu 1 se numește **evenimentul sigur**.

*Matematici financiare*

**Procente:** Dacă  $a, b, p \in [0, \infty)$ ,  $b \neq 0$  astfel încât  $\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$ , atunci spunem că  $a$  reprezintă  $p\%$  din  $b$ .

**TVA-ul:**

- este un impozit perceput de stat și care se aplică la toate produsele și serviciile, înaintea prețului de vânzare;
- cota corespunzătoare este stabilită prin lege și depinde de tipul produselor și al serviciilor.
- este adevărată relația: **preț producție + TVA = preț vânzare**.

## FIȘĂ DE LUCRU

1. În penarul Mihaelei sunt 3 creioane galbene și 2 creioane albastre. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare un creion acesta să fie galben?
2. Aruncăm un zar. Care este probabilitatea ca pe fața de sus a zarului să apară un număr par de puncte?
3. Dintr-un lot de 80 piese, 76 nu sunt defecte. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare o piesă aceasta să fie defectă?
4. Într-o urnă sunt 16 bile negre și 28 bile albe. Se extrage o bilă. Probabilitatea să fie verde este egală cu .....
5. Într-o clasă sunt 12 fete și 16 băieți. Probabilitatea ca la tablă să iasă un băiat este egală cu .....
6. Să se afle probabilitatea ca alegând un element al mulțimii  $\{0, 1, 2, 3\}$  acesta să verifice inegalitatea  $n^2 < 8$ .
7. Aruncăm un zar care are fețele numerotate cu cifre de la 1 la 6. Probabilitatea ca pe fața de sus a zarului să apară cifra 8 este egală cu .....
8. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ , acesta să fie divizor al lui 1000
9. Calculați probabilitatea ca un număr între 1 și 50 să fie număr prim.
10. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

11. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 8.
12. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.
13. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
14. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , acesta să fie multiplu de 5.
15. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ , acesta să fie multiplu de 15.
16. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să fie multiplu de 2.
17. Probabilitatea ca din 4500 de sticle de băutură răcoritoare să cumperi una din cele 30 de sticle pe al cărui capac scrie „Ai câștigat 100 lei “ este de .....
18. Aflați probabilitatea ca aruncând două zaruri să obținem două fețe în care suma punctelor să fie un număr prim .
19. Într-o urnă sunt 25 de bile numerotate de la 1 la 25 . Se extrage la întâmplare o bilă din urnă . Probabilitatea ca pe bila extrasă să fie scris un număr pătrat perfect este .... .
20. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre acesta să fie cub perfect .
21. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  acesta să verifice inegalitatea  $n^2 \leq 2^n$  .
22. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare o submulțime a mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  aceasta să aibă trei elemente .
23. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întâmplare un element al mulțimii  $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$  acesta să fie rațional .
24. O bicicleta costa 64 lei. Aflați cât va costa după o ieftinire cu 43 %.
25. După o scumpire cu 64 %, un termostat clasic s-a scumpit cu 160 lei. Aflați prețul inițial.
26. Un album s-a scumpit cu 25 %, iar apoi s-a ieftinit cu 30 %. Acum are prețul de 38.50 lire. Calculați prețul inițial.
27. Prețul unui produs este de 258 lei. Acest preț se micșorează cu 26%. Care este prețul final?
28. Aflați prețul inițial al unui produs, dacă după o scumpire cu 28% costă 2016 lei.
29. Un produs costă 500 lei. El se ieftinește succesiv cu 20% și mai apoi cu 10%. Aflați prețul final al produsului.
30. Prețul unui produs este de 1300 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 1131 lei?
31. Într-o clasă sunt p elevi. Dintre aceștia 40% sunt pasionați de sport, 36% sunt pasionați de pictură, iar restul de 6 elevi sunt pasionați de muzică. Determinați numărul de elevi din clasă.

## TEMA 5

### PLANUL CARTEZIAN

#### Puncte în sistem de coordonate

Se consideră un sistem de axe ortogonale (perpendiculare)  $xOy$ . Pentru orice punct  $M$  din plan există și sunt unice numerele reale  $x_M, y_M$ , numite coordonate. Notăm  $M(x_M, y_M)$ , unde  $x_M$  este abscisa, iar  $y_M$  este ordonata.

Fie punctele  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$  și  $D(x_D, y_D)$ . Atunci au loc relațiile:

- Formula distanței  $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ ;
- Mijlocul  $M$  al segmentului  $[AB]$  are coordonatele  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ ,  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ ;
- Dacă  $N \in [AB]$  pentru care  $\frac{NA}{NB} = k$ , atunci  $x_N = \frac{x_A + kx_B}{1+k}$ ,  $y_N = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$ ;
- Centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  are coordonatele  $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ ,  $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ ;
- $ABCD$  este paralelogram dacă și numai dacă  $x_A + x_C = x_B + x_D$ ,  $y_A + y_C = y_B + y_D$ .

#### Ecuatia dreptei

Ecuatia generală a unei drepte  $d$ :  $ax + by + c = 0$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Punctul  $M(x_M, y_M) \in d$  dacă și numai dacă  $ax_M + by_M + c = 0$ .

Distanța de la  $M(x_M, y_M)$  la  $d: ax + by + c = 0$  este egală cu  $\text{dist}(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Dacă  $b = 0$ , se obține ecuația de forma  $x = x_0$ , care este forma generală a unei drepte verticale.

Dacă  $a = 0$ , se obține ecuația de forma  $y = y_0$ , care este forma generală a unei drepte orizontale.

Fie  $d$  o dreaptă oblică. Tangenta unghiului format în sens trigonometric de axa  $Ox$  cu dreapta  $d$  reprezintă **panta dreptei**.

Dacă  $ab \neq 0$ , ecuația dreptei se poate aduce la forma  $y = mx + n$ , unde  $m$  reprezintă panta dreptei  $d$ .

**Teoremă:** Fie  $a, b$  două drepte distincte de pantă  $m_a$  și, respectiv,  $m_b$ . Atunci:

$$\text{P1: } a \parallel b \Leftrightarrow m_a = m_b;$$

$$\text{P2: } a \perp b \Leftrightarrow m_a m_b = -1.$$

#### Vectorii în sistem de coordonate

Vectorul determinat de punctele  $(0,0)$  și  $(1,0)$  se notează cu  $\vec{i}$ , iar vectorul determinat de punctele  $(0,0)$  și  $(0,1)$  se notează cu  $\vec{j}$ . Cei doi vectori se numesc **versorii axelor**. Pentru orice vector  $\vec{u}$  există numerele reale unice  $u_1, u_2$ , astfel încât  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ .

Avem egalitatea  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

Fie vectorii  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ ,  $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ . Atunci:

$$\text{P1. } \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \text{ și } u_2 = v_2; \quad \text{P2. } \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}; \quad \text{P3. } \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1) \vec{i} + (u_2 + v_2) \vec{j};$$

$$\text{P4. } \alpha \vec{u} = \alpha u_1 \vec{i} + \alpha u_2 \vec{j}; \quad \text{P5. } \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2; \quad \text{P6. } \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1) \vec{i} + (u_2 - v_2) \vec{j}.$$

Legătura dintre puncte și vectori:  $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$ .

## FISA DE LUCRU

Determinați coordonatele mijlocului segmentului format de punctele  $A(2, 5)$  și  $B(4, 11)$ .

Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(2, -1)$ .

Calculați lungimea segmentului format de punctele  $A(2, 5)$  și  $B(6, 8)$ .

Demonstrați că punctele  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(9, 9)$  și  $D(7, 5)$  reprezintă vârfurile unui paralelogram.

Demonstrați că punctul  $M(1, 2)$  aparține dreptei  $d: 2x + 3y - 8 = 0$ .

Demonstrați că dreptele  $a: 2x + 4x - 1 = 0$  și  $b: x + 2y + 3 = 0$  sunt paralele.

Considerăm punctele  $A(1, 3)$  și  $B(2, 5)$ . Determinați numerele reale  $a, b$ , astfel încât  $\overline{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .

Se consideră vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = 3\vec{i} + 19\vec{j}$ . Demonstrați că  $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$ .

Determinați modulul vectorului  $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ .

Se consideră vectorii  $\overline{AB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$  și  $\overline{BC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ . Calculați modulul vectorului  $\overline{AC}$ .

## Testul 1

1. Se consideră punctele  $A(3, 1)$ ,  $B(1, 2)$  și  $C(a, b)$ . Determinați numerele reale  $a, b$ , știind că punctul  $B$  este mijlocul segmentului  $AC$ .
2. Se consideră punctele  $A(1, 5)$ ,  $B(3, -1)$  și  $O(0, 0)$ . Fie  $M$  mijlocul segmentului  $AB$ . Demonstrați că  $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$ .
3. Demonstrați că dreptele de ecuații  $a: 3x - 2y + 1 = 0$  și  $b: 4x + 6y + 2 = 0$  sunt perpendiculare.
4. Determinați numărul  $a \in \mathbb{R}$ , știind că punctul  $A(a, a+1)$  aparține dreptei  $d: 3x - 2y - 5 = 0$ .
5. Se consideră vectorul  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ . Determinați modulul vectorului  $2\vec{u}$ .
6. Considerăm punctele  $A(3, 2)$ ,  $B(5, 4)$ ,  $C(0, -2)$  și  $D(-2, 0)$ . Demonstrați că  $AB = CD$ .

## Testul 2\*

1. Determinați coordonatele simetricului punctului  $A(-3, 2)$  față de mijlocul segmentului  $BC$ , unde  $B(1, -4)$  și  $C(-5, -1)$ .
2. Determinați ecuația medianei duse din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$ , unde  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(2, -5)$ .
3. Determinați ecuația dreptei care conține punctul  $A(-2, 2)$  și este paralelă cu dreapta determinată de punctele  $C(2, 1)$  și  $D(-1, -3)$ .
4. Determinați numărul real  $\alpha$ , pentru care dreptele de ecuații  $x + 2y + 1 = 0$  și  $2x - \alpha y - 1 = 0$  sunt perpendiculare.
5. Determinați valorile numărului real  $\alpha$ , pentru care vectorii  $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j}$  au module egale.
6. Fie vectorii  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ . Demonstrați egalitatea:  $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + 2\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ .

**TEST DE EVALUARE - MATEMATICĂ CLASA A XI-A / A XII-A**

- 5p 1. Rezultatul calculului  $\frac{2}{3} : 2^2 + \frac{5}{6}$  este ...
- 5p 2. Rezultatul calculului  $2 \frac{3}{4} : \left(1 \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + 0,75 + \frac{5}{6}$  este ...
- 5p 3. Calculați  $(-43 + 3^2 \cdot 2) : (-5)^2 + (-17 + 15) \cdot (-1)^3$ .
- 5p 4. Calculați  $(3\sqrt{2} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2} - 2\sqrt{7}) =$
- 5p 5. Determinați soluțiile reale ale ecuației  $3x - 1 = 7 + x$ .
- 5p 6. Determinați soluțiile întregi ale ecuației  $5x^2 - 3x - 2 = 0$ .
- 10p 7. Folosind proprietățile logaritmulor, calculați  
a)  $\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9$ ; b)  $\log_2 3 - \log_2 \frac{1}{3}$
- 5p 8. Soluția ecuației  $3^{2x+1} = 3^2$  este...
- 5p 9. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{3x+1} = 3$
- 5p 10. Să se afle soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+1) = 3$
- 5p 11. Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_1 x_2$  știind că  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2x - 2 = 0$ .
- 5p 12. Calculați  $f(-1) + f(0) + f(1)$ , unde  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x$
- 5p 13. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctul  $A(1, 5)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + m$
- 10p 14. Determinați punctele de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  cu axele de coordonate.
- 10p 15. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 2$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x + 1$ .  
Determinați numărul  $a$  pentru care  $f(a) = g(a)$

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu*
- *Timpul efectiv de lucru este de 50 minute*

## TEMA 6

### TRIGONOMETRIE

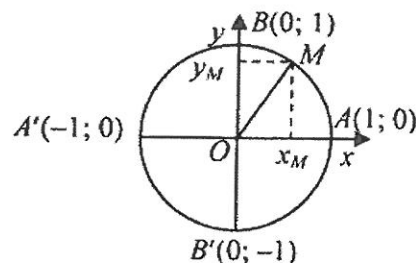
#### Cercul trigonometric

Unități de măsură pentru arce și unghiuri: ● gradul sexagesimal;  
 ● radianul.

Relația de legătură este:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$ .

Pentru orice număr real  $t$ , există un unic punct  $M(x_M, y_M)$  pe cercul trigonometric astfel încât  $m(\widehat{AM}) = t$ . Dacă  $t \geq 0$ , se parcurge cercul în sens trigonometric (de la  $A$  spre  $B$ ). Dacă  $t < 0$ , se parcurge cercul în sens invers trigonometric. Atunci:

$$\cos t = x_M; \quad \sin t = y_M; \quad \operatorname{tg} t = \frac{y_M}{x_M}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{x_M}{y_M}.$$



#### Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice

Pentru calcularea valorilor funcțiilor arcsin, arccos, arctg și arcctg se folosesc intervalele indicate în domeniul de definiție al funcțiilor date:

1)  $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; 2)  $E(\arccos) = [0; \pi]$ ; 3)  $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ; 4)  $E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi)$ .

*Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pe intervalul  $[0, \pi]$*

$\alpha \text{ rad}$ (radiani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$n^\circ$ (grade)	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
<b>Cadrane</b>	<b>I cadran</b>					<b>II cadran</b>			

Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pe intervalul  $[\pi; 2\pi]$ 

$\alpha$ rad (radiani)	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	$\frac{\pi}{12}$
$n^\circ$ (grade)	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$	$15^\circ$
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$2-\sqrt{3}$
$ctg \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$2+\sqrt{3}$
Cadrane	III cadran					IV cadran				

•  $\pi \approx 3,1415926\dots$ ;  $\pi$  radiani  $= 180^\circ$ ; 1 radian  $\approx 57^\circ 17' 45''$ ;  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  radiani.

• Numărul  $\pi$  este un număr irațional transcendent numit **numărul lui Pitagora**.

### Paritatea funcțiilor trigonometrice

**Teorema 1:** Funcția **cosinus** este **pară**, iar funcțiile **sinus**, **tangenta** și **cotangenta** sunt **impare**:

1)  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ;

2)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ; 3)  $tg(-\alpha) = -tg \alpha$ ; 4)  $ctg(-\alpha) = -ctg \alpha$ .

### Periodicitatea funcțiilor trigonometrice

**Teorema 2:** Funcțiile sinus și cosinus sunt **periodice** cu **perioada generală**  $T_n = 2\pi n$ , unde  $n \in Z$  și **perioada principală**  $T_1 = 2\pi$ .

• Deci:  $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$ ,  $n \in Z$  și  $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$ ,  $n \in Z$ .

• Numărul  $T_n = 2\pi n$ , unde  $n \in Z$  este **perioada generală** a funcțiilor sinus și cosinus.

• Numărul  $T_1 = 2\pi$  este **perioada principală** a funcțiilor sinus și cosinus.

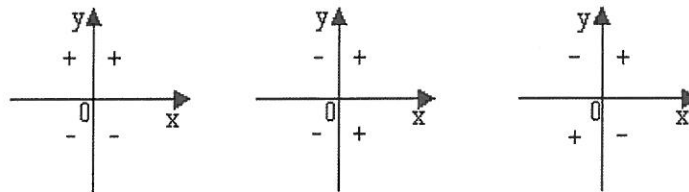
**Teorema 3:** Funcțiile tangenta și cotangenta sunt **periodice** cu **perioada generală**

$T_n = 2\pi n$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$  și **perioada principală**  $T_1 = 2\pi$ .

- Deci:  $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  și  $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Numărul  $T_n = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  este **perioada generală** a funcțiilor **tg și ctg**.
- Numărul  $T_1 = \pi$  este **perioada principală** a funcțiilor **tg și ctg**.

### Semnele funcțiilor trigonometrice

$$\operatorname{sgn}(\sin \alpha) = \operatorname{sgn}(y_\alpha) \quad \operatorname{sgn}(\cos \alpha) = \operatorname{sgn}(x_\alpha) \quad \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \alpha)$$



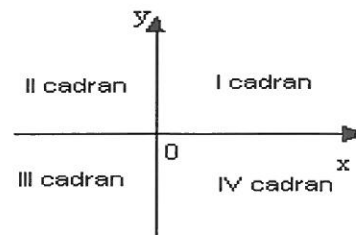
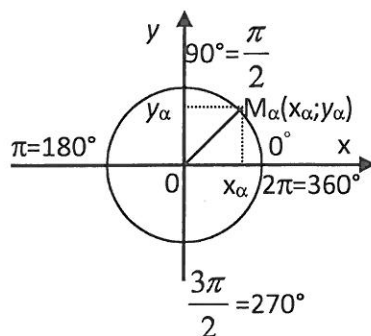
### Cadrane (în grade și radiani)

**I cadran:**  $(0^\circ; 90^\circ)$  în grade sau  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  în radiani;

**II cadran:**  $(90^\circ; 180^\circ)$  în grade sau  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  în radiani;

**III cadran:**  $(180^\circ; 270^\circ)$  în grade sau  $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  în radiani;

**IV cadran:**  $(270^\circ; 360^\circ)$  în grade sau  $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  în radiani.



**Formule de transformare**

**Relații dintre măsura în radiani și măsura în grade (sexazecimale) a arcelor și unghiurilor :**

$$1) \pi \text{ radiani} = 180^\circ; \quad 2) \alpha \text{ radiani} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}; \quad 3) n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi};$$

$$4) 1^\circ = 60' = 3600''; \quad 5) 90^\circ = 89^\circ 59' 60''; \quad 6) 180^\circ = 179^\circ 59' 60''.$$

**Formule de reducere**

**Definiție:** Formulele care exprimă funcțiile trigonometrice sin, cos, tg și ctg ale unghiurilor  $\pi \pm \alpha$ ,  $2\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  și  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  prin funcțiile trigonometrice de argument (unghi)  $\alpha$  se numesc **formule de reducere**.

**a) Reguli de obținere ale formulelor de reducere:**

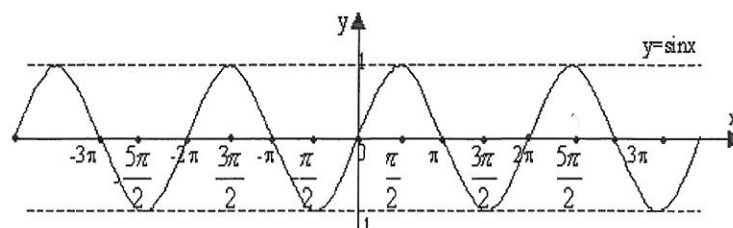
**R1:** Pentru unghiurile  $\pi \pm \alpha$  și  $2\pi \pm \alpha$  funcțiile trigonometrice trec în ele însuși, adică:  $\sin \rightarrow \sin \alpha$ ,  $\cos \rightarrow \cos \alpha$ ,  $\text{tg} \rightarrow \text{tg} \alpha$ ,  $\text{ctg} \rightarrow \text{ctg} \alpha$ ;

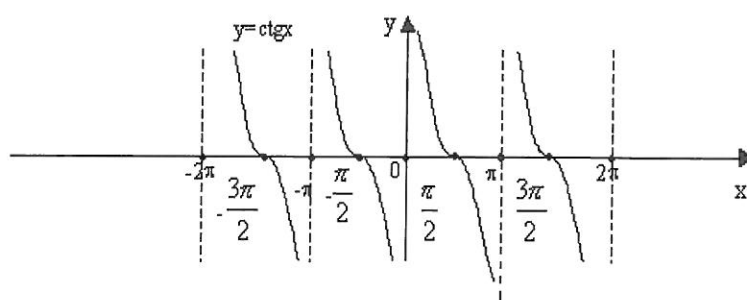
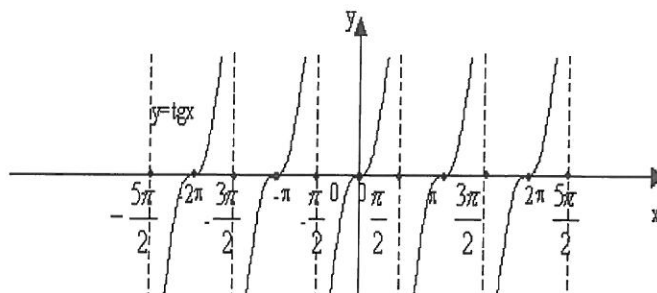
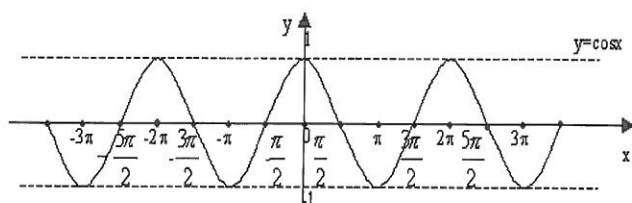
**R2:** Pentru unghiurile  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  și  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  funcțiile trigonometrice trec în cofuncțiile lor, adică:  $\sin \rightarrow \cos \alpha$ ,  $\cos \rightarrow \sin \alpha$ ,  $\text{tg} \rightarrow \text{ctg} \alpha$ ,  $\text{ctg} \rightarrow \text{tg} \alpha$ ;

**R3:** Semnul funcției noi primite coincide cu semnul funcției inițiale, care se determină în dependență de unghiul de reducere, considerând  $\alpha$  unghi ascuțit.

**Tabelul obținerii formulelor de reducere**

$\beta$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\beta$	$90^\circ + \alpha$	$90^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
<b>sin</b> $\beta$	cos $\alpha$	cos $\alpha$	-cos $\alpha$	-cos $\alpha$	-sin $\alpha$	sin $\alpha$	sin $\alpha$	-sin $\alpha$
<b>cos</b> $\beta$	-sin $\alpha$	sin $\alpha$	sin $\alpha$	-sin $\alpha$	-cos $\alpha$	-cos $\alpha$	cos $\alpha$	cos $\alpha$
<b>tg</b> $\beta$	-ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	-ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	tg $\alpha$	-tg $\alpha$	tg $\alpha$	-tg $\alpha$
<b>ctg</b> $\beta$	-tg $\alpha$	tg $\alpha$	-tg $\alpha$	tg $\alpha$	ctg $\alpha$	-ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	-ctg $\alpha$

**Graficele funcțiilor trigonometrice**



### Formule trigonometrice de bază

- 1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;
- 2)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;
- 3)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ;
- 4)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ;
- 5)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ;
- 6)  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ;
- 7)  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$ ;
- 8)  $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$ .

### Consecințe din formulele trigonometrice de bază:

- 1)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ;
- 2)  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ;
- 3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ ;
- 4)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;
- 5)  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ;
- 6)  $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ ;
- 7)  $\cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ ;
- 8)  $\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ;
- 9)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ ;
- 10)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ ;
- 11)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$ ;
- 12)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$ .

**Formulele adunării:**

a)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ ; b)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ ;

c)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ; d)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ;

e)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ; f)  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ;

h)  $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$ ; i)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ .

**Formulele unghiului dublu și consecințe din ele:**

1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

a)  $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\alpha$  b)  $1 + \sin 2\alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$  c)  $1 - \sin 2\alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$

2)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

a)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ; b)  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ;

c)  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ ; d)  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ ;

3)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ; 4)  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ .

**Formule de micșorare a gradului:**

a)  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ; b)  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ;

c)  $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ; d)  $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ .

**Formulele unghiului triplu și consecințe din ele:**

a)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ , unde  $\alpha \in R$ ;

b)  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ , unde  $\alpha \in R$ ;

c)  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , unde  $\alpha, 3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ ;

d)  $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ , unde  $\alpha, 3\alpha \neq \pi n, n \in Z$ ;

e)  $\sin 3\alpha = 4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$ , unde  $\alpha \in R$ .

**Transformarea sumei (și diferenței) în produs:**

a)  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ; b)  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ ;

$$\text{c) } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \text{d) } \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\text{e) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \text{f) } \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\text{h) } \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \text{i) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\text{j) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}; \quad \text{k) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

**Transformarea produsului în sumă (diferență):**

$$\text{a) } \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\text{b) } \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{c) } \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \text{e) } \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

**Formule speciale:**

$$1) \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$2) \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$4) \cos \alpha - \sin \alpha = -\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

**Formulele jumătății de argument:**

$$1) \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$2) \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}};$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}};$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$7) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

$$8) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Formulele substituției universale:**

• Dacă  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$ , atunci  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} t$ , unde  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  și au loc următoarele relații:

$$1) \sin \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1+tg^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad 2) \cos \alpha = \frac{1-tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1+tg^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, t \in R;$$

$$3) tg \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1-tg^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}, t \neq \pm 1; \quad 4) ctg \alpha = \frac{1-tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2tg \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{2t}, t \neq 0.$$

**Ecuatii trigonometrice (simple)**

1)  $\sin x = a$ , unde  $a \in R$

a)  $a \in [-1; 1] \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z;$

b)  $a \notin [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow x \in \emptyset.$

2)  $\cos x = a$ , unde  $a \in R$

a)  $a \in [-1; 1] \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$  b)  $a \notin [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow x \in \emptyset.$

3)  $tg x = a, a \in R$

4)  $ctg x = a, a \in R$

$x = \arctg a + \pi n, n \in Z$

$x = \text{arcctg } a + \pi n, n \in Z$

Ecuatiile  $\sin x = a$  și  $\cos x = a$  au soluții numai pentru  $a \in [-1; 1]$ , iar ecuațiile  $tg x = a$  și  $ctg x = a$  au soluții pentru orice  $a \in R$ .

**Cazuri particulare ale ecuațiilor trigonometrice:**

1)  $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

2)  $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z;$

3)  $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

4)  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in Z;$

5)  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

6)  $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

**Inecuații trigonometrice simple**

1) a)  $\sin x > a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$x \in \bigcup_{n \in Z} (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in Z;$

b)  $\sin x \geq a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z};$$

2) a)  $\sin x < a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\sin x \leq a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$$

3) a)  $\cos x > a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\cos x \geq a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$$

4) a)  $\cos x < a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\cos x \leq a$ , unde  $|a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$$

5) a)  $\operatorname{tg} x > a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\operatorname{tg} x \geq a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

6) a)  $\operatorname{tg} x < a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\operatorname{tg} x \leq a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n], n \in \mathbb{Z}$$

7) a)  $\operatorname{ctg} x > a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\operatorname{ctg} x \geq a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n], n \in \mathbb{Z};$$

8) a)  $\operatorname{ctg} x < a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z};$$

b)  $\operatorname{ctg} x \leq a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

Simbolul  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}$  semnifică reuniunea intervalelor indicate pentru toate valorile întregi ale lui  $n$ .

Pentru calcularea valorilor funcțiilor arcsin, arccos, arctg și arcctg se folosesc intervalele indicate în domeniul de valori al funcțiilor date:

1)  $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$       2)  $E(\arccos) = [0; \pi];$

3)  $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$       4)  $E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi).$

**Funcții trigonometrice inverse**

**Definiție:** Funcțiile **arcsinus**, **arccosinus**, **arctangenta** și **arccotangenta** se numesc **funcții trigonometrice inverse**.

**Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice inverse arcsinus și arccosinus**

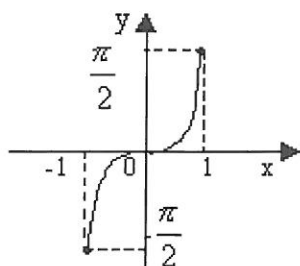
$a$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

**Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice inverse arctangenta și arccotangenta**

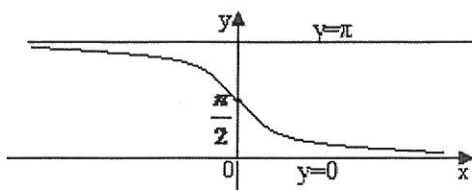
$a$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctg a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\text{arccctg } a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

**Graficele funcțiilor trigonometrice inverse**

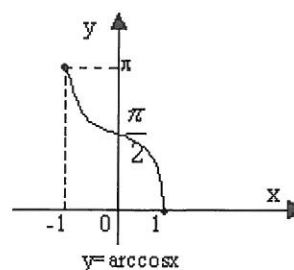
$$y = \arcsin x$$



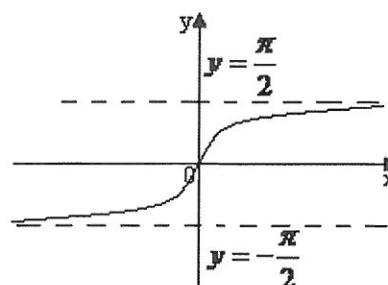
$$y = \text{arccctg } x$$



$$y = \arccos x$$



$$y = \arctg x$$



**Condiții de existență a funcțiilor trigonometrice inverse:**

1)  $\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = a, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  și  $a \in [-1; 1]$ ;

2)  $\arccos a = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = a, \alpha \in [0; \pi]$  și  $a \in [-1; 1]$ ;

3)  $\operatorname{arctg} a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = a$ , unde  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  și  $a \in \mathbb{R}$ ;

4)  $\operatorname{arcctg} a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = a$ , unde  $\alpha \in (0; \pi)$  și  $a \in \mathbb{R}$ .

**FIȘĂ DE LUCRU – TRIGONOMETRIE**

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x \quad \sin(90^\circ - x) = \cos x \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x \quad \cos(90^\circ - x) = \sin x \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

1. Să se demonstreze că expresia  $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x$  este constantă pentru orice  $\forall x \in \mathbb{R}$ 2. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .3. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$  și că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.4. Să se arate ca, pentru orice unghi ascuțit  $x$ , este adevărată egalitatea  $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$ .5. Să se calculeze  $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$ .6. Să se calculeze  $\sin 120^\circ$ .7. Să se calculeze  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$ .8. Să se calculeze  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$ .9. Să se calculeze  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ .10. Să se calculeze  $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$ .11. Să se calculeze  $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$ .12. Să se verifice că în orice triunghi dreptunghic  $ABC$ , de ipotenuză  $BC$ , are loc relația  $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$ .13. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{5}{13}$  și că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.14. Să se calculeze  $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ$ .15. Să se calculeze sinusului unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$  în care  $AB = 6$ ,  $BC = 10$  și  $\sin x = \frac{3}{5}$

16. Să se calculeze  $\cos x$ ,  $\sin 2x$  și  $\cos 2x$  știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$  și că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.
17. Să se calculeze  $\cos^2 30^\circ + \sin^2 150^\circ$ .
18. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulțimea  $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$ , acesta să fie un număr rațional.
19. Să se calculeze  $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$ .
20. Să se calculeze  $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ$ .
21. Să se determine  $\cos(180^\circ - x)$ , știind că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit și  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
22. Să se calculeze  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$ .
23. Știind că  $\sin 80^\circ - \cos 80^\circ = a$ , să se calculeze  $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ - a$ .
24. Să se calculeze  $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$ .
25. Să se calculeze  $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$ .
26. Știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$ , să se calculeze  $\sin(180^\circ - x)$ .
27. Să se calculeze  $\cos(180^\circ - x)$ , știind că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit și  $\cos x = \frac{1}{3}$ .
28. Să se calculeze  $2\sin^2 135^\circ$ .

### FIȘĂ DE LUCRU - Teorema sinusurilor și formule pentru aria triunghiului

- În triunghiul ABC se dau  $BC = \sqrt{2}$ ,  $m(\hat{A}) = 30^\circ$ ,  $m(\hat{C}) = 45^\circ$ . Să se calculeze lungimea laturii AB.
- În triunghiul ABC se dau  $BC = 4$ ,  $m(\hat{A}) = 30^\circ$ . Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC.
- Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și lungimea razei cercului circumscris triunghiului este  $R = 2\sqrt{3}$ .
- Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ,  $m(\hat{B}) = 30^\circ$ ,  $BC = 6$ .
- Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ ,  $m(\hat{A}) = 45^\circ$ .
- Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că  $AB = 6$ ,  $AC = 4$ ,  $m(\hat{A}) = 30^\circ$ .
- În triunghiul ABC se dau  $AB = 5$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 13$ . Să se calculeze aria triunghiului ABC și  $\sin A + \sin B + \sin C$ .
- Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că  $BC = \sqrt{6}$ ,  $m(\square ABC) = 60^\circ$ ,  $m(\square BAC) = 45^\circ$ .
- Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ .

**TEST DE EVALUARE**

1. Să se calculeze  $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \left(1 - \frac{3}{2}\right)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - x + 4$ . Să se calculeze  $f(-1)$  și  $f(0)$ .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{25 - 9x} - 5 = 0$ .
4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{n \in \mathbf{N} / 2 \leq n < 25\}$ , acesta să fie divizor al lui 100.
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(5,5)$ ,  $C(7,10)$ . Arătați că  $AC = 2AB$ .
6. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{5}{13}$  și că  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.
7. Determinați prețul inițial al unui obiect știind că după o ieftinire cu 10% acesta costă 315 lei.
8. Determinați numărul natural  $x$  știind că numerele  $-3$ ,  $x^2$ ,  $x+4$  sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
9. Soluția ecuației  $3^{2x+1} = 27$  este...
10. Să se afle soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+1) = 3\log_2 3$ .
11. Să se calculeze  $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$ .

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Subiectele 8 și 11 au câte 9 puncte, restul 8 puncte fiecare.*
- *Timpu efectiv de lucru este de 50 minute*

## TEMA 7

### MATRICE. DETERMINANȚI

#### Matrice

Considerăm o mulțime  $E \subset \mathbb{C}$  și  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . *Matrice de tip  $(m, n)$  cu elemente din  $E$*  este o funcție  $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow E$ . Spunem că matricea  $A$  are  $m$  linii și  $n$  coloane.

Dacă notăm  $A(i, j) = a_{ij}$ , matricea  $A$  poate fi notată prin  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ .

În cazul în care nu există pericol de confuzie, notăm matricea  $A$  prin  $(a_{ij})$ .

*Mulțimea matricelor de tip  $(m, n)$  cu elementele din mulțimea  $E$*  se notează cu  $\mathcal{M}_{m,n}(E)$ .

O matrice de tip  $(n, n)$  se numește *matrice pătratică de ordin  $n$*  și se notează  $(a_{ij})_n$  sau  $(a_{ij})$ , iar mulțimea matricelor pătratice se notează  $\mathcal{M}(E)$ .

Sistemul ordonat de elemente  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  se numește *diagonala principală* a matricei  $A$ , iar sistemul  $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1})$  se numește *diagonala secundară*.

O matrice de tip  $(m, n)$  cu toate elementele egale cu 0 se numește *matrice nulă* și se notează  $O_{m,n}$ .

*Matricele  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  și  $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  sunt egale dacă  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .*

*Transpusa unei matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1, m} \\ j=\overline{1, n}}}$  cu  $m$  linii și  $n$  coloane este o matrice notată  ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}}$  cu  $n$  linii și  $m$  coloane, cu  $b_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ .*

Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , definim  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

#### Operații cu matrice

*Suma matricelor  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  și  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , din  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , este matricea*

$C = A + B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , cu  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .

*Produsul dintre numărul complex  $\lambda$  (numit scalar) și matricea  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  din  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  este matricea  $B = \lambda A = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , unde  $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .*

Produsul matricelor  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  și  $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$  (în această ordine) este matricea

$$C = A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}, \text{ cu } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Pentru  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avem  $A^k = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}, k \in \mathbb{N}^*, \text{ iar } A^0 = I_n.$

### Determinanți

Determinantul unei matrice de ordin 2,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , este numărul notat

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinantul unei matrice de ordin 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , este numărul

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Fie  $A = (a_{ij})$  o matrice de tip  $(m; n)$ . Un *minor de ordinul  $r$*  al matricei  $A$  este determinantul matricei pătratică formată cu elementele lui  $A$  situate la intersecțiile a  $r$  linii distincte cu  $r$  coloane distincte.

Dacă  $A = (a_{ij})$  este o matrice pătratică de ordinul  $n$ , *complementul algebric al elementului  $a_{ij}$*  este numărul  $(-1)^{i+j}d_{ij}$ , unde  $d_{ij}$  este minorul obținut prin eliminarea liniei  $i$  și a coloanei  $j$  din matricea  $A$ .

Dezvoltarea determinantului după o linie sau o coloană se face astfel:

1. alegem o linie sau o coloană și înmulțim fiecare element al ei cu complementul său algebric;
2. adunăm produsele astfel obținute.

De exemplu, alegând prima linie a unui determinant de ordinul 3, obținem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

### Sisteme liniare

O *ecuație liniară* cu  $n$  necunoscute,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este o ecuație de forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1, \text{ unde } a_1, a_2, \dots, a_n, b_1 \in \mathbb{C}.$$

Forma generală a unui *sistem liniar* este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ unde } x_1, \dots, x_n$$

sunt necunoscutele sistemului, numerele complexe  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  sunt coeficienții necunoscutelor și  $b_1, b_2, \dots, b_m$  sunt termenii liberi ai sistemului.

Unui sistem linear îi asociem *matricea sistemului*, notată  $A$ , formată din coeficienții necunoscutelor și *matricea extinsă a sistemului*, notată  $\bar{A}$ , care se obține adăugând la coloanele matricei  $A$  coloana termenilor liberi:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Indicele  $i$  indică ecuația sistemului și indicele  $j$  indică necunoscuta la care ne referim.

Un sistem linear se numește *omogen* dacă toți termenii liberi  $b_1, b_2, \dots, b_m$  sunt nuli. În caz contrar, sistemul linear este *neomogen*.

Un sistem linear poate fi:

- *compatibil determinat*, dacă are o soluție unică;
- *compatibil nedeterminat*, dacă are o infinitate de soluții;
- *incompatibil*, dacă nu are soluție.

Pentru un sistem linear de  $n$  ecuații și  $n$  necunoscute, dacă determinantul matricei sistemului este nenul, atunci sistemul este compatibil determinat; în caz contrar, sistemul poate fi incompatibil sau compatibil nedeterminat.

#### *Metoda lui Cramer*

Fie  $\mathcal{S}$  un sistem linear cu  $n$  ecuații și  $n$  necunoscute și fie  $\Delta$  determinantul matricei acestui sistem.

Dacă  $\Delta \neq 0$ , notăm cu  $\Delta_{x_i}$  determinantul obținut din  $\Delta$  prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei  $x_i$  cu coloana termenilor liberi,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

Atunci  $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ .

#### *Matrice inversabile*

O matrice pătratică  $A = (a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  se numește *inversabilă* dacă există matricea  $B = (b_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ .

Matricea pătratică  $A = (a_{ij})_n$  este inversabilă dacă și numai dacă  $\det A \neq 0$ .

*Inversa matricei*  $A$  este matricea  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ , unde  $A^*$  se obține înlocuind fiecare element al matricei  $A$  cu complementul său algebric.  $A^*$  se numește *adjuncta matricei*  $A$ .

#### *Ecuații matriceale*

Un sistem linear poate fi exprimat matriceal astfel:  $AX = B$ , unde  $A$  este matricea sistemului,  $X$  este matricea necunoscutelor (matrice coloană) și  $B$  este matricea

termenilor liberi (matrice coloană). Dacă matricea  $A$  este inversabilă avem  $X = A^{-1}B$  soluție unică.

Dacă matricea  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  nu este nulă, există un număr natural  $r \leq \min\{m, n\}$  astfel încât cel puțin un minor de ordinul  $r$  este nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât  $r$  (dacă există) sunt nuli. Numărul  $r$  se numește *rangul matricei  $A$* .

#### *Teorema Kronecker-Capelli.*

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

*Teorema lui Rouché.* Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.

Terminologia și notațiile din teorema lui Rouché se explică în cele ce urmează.

Determinanții caracteristici se consideră în cazul în care rangul sistemului este mai mic decât numărul de ecuații.

Din matricea sistemului alegem un minor nenul de ordin  $r$  pe care îl numim *determinant principal* și îl notăm  $\Delta_p$ . Necunoscutele ai căror coeficienți sunt coloane în  $\Delta_p$  se numesc *necunoscute principale*. Celelalte se numesc *necunoscute secundare*. Ecuațiile ai căror coeficienți sunt linii în  $\Delta_p$  se numesc *ecuații principale*. Celelalte se numesc *ecuații secundare*.

Construim *determinanții caracteristici*,  $\Delta_{cs}$ , prin bordarea determinantului principal  $\Delta_p$ : „orizontal” cu coeficienții necunoscutelor principale din câte o ecuație secundară și „vertical” cu termenii liberi corespunzători.

Un sistem linear se poate rezolva prin *metoda lui Gauss*, care constă în aducerea

sistemului la o formă triunghiulară: 
$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1n}x_n = \beta_{n-1} \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

În acest caz, soluția sistemului se obține ușor pornind de la ultima ecuație.

Forma triunghiulară se obține aplicând sistemului inițial transformările:

- i) permutarea între ele a două ecuații;
- ii) înmulțirea unei ecuații cu un număr nenul;
- iii) adunarea unei ecuații la o altă ecuație.

### FIȘĂ DE LUCRU – DETERMINANȚI

1. Să se calculeze determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}$$

2. Rezolvați ecuațiile:  $\begin{vmatrix} 3x & x+2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$  și  $\begin{vmatrix} 3 & -x & 1 \\ -x & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0$

3. Se dau punctele A(7;2), B(5;3), C(3;4) D(3;1). Se cere:

- Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.
- Să se calculeze aria triunghiului ABD.
- Să se scrie ecuația dreptei AB.
- Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care punctele A(m,m+2) B(m, 3) C(1,3) sunt coliniare .

4. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ , unde x este număr real. Se notează  $A^2 = A \cdot A$ .

- Să se determine x real , știind că  $\det(A)=0$ .
- Să se verifice egalitatea  $A^2 = (2x-6)A - (x^2-6x+8) \cdot I_2$
- Să se determine x real, pentru care  $A^2 = 2A$ .

### FIȘĂ DE LUCRU - MATRICE. OPERAȚII CU MATRICI

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$ , unde a este număr real.

a) Pentru  $a=1$ , calculați  $AB+BA$ .

b) Aflați a știind că  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & x-1 \end{pmatrix}$ , unde x este număr real.

a) Calculați  $A(1) + A(2) + A(3)$ .

b) Calculați  $A(0) A(2) A(3)$ .

c) Aflați x, știind că  $A(x) = I_2$

3. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m+1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  unde m este număr real.

a) Calculați  $\det A$ .

b) Pentru  $m=-2$ , arătați că  $A + B = O_2$ .

- c) Determinați numărul real  $m$ , pentru care  $AB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$ .
4. Se consideră matricele  $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 - m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $m$  este număr real.
- Arătați că  $M(1) + M(3) = 2M(2)$ .
  - Demonstrați că  $M(m)M(n) = M(m+n-2)$ , pentru orice  $m$  și  $n$  numere reale.
  - Determinați numărul real  $x$ , știind că  $M(x)M(x) = M(x^2 - 1)$ .
5. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Calculați  $\det A$ .
  - Arătați că  $2AB - BA + I_2$ .
  - Aflați  $x$ , număr real, pentru care  $AA - xA = I_2$ .
6. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Calculați  $\det A$ .
  - Arătați că  $(A - I_3)(A - I_3)(A - I_3) = O_3$ .
  - Rezolvați ecuația matricială  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

### TEST DE EVALUARE

- Se dau punctele  $A(7;2)$ ,  $B(5;3)$ ,  $C(3;4)$   $D(3;1)$ . Se cere:
    - Să se arate că punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt coliniare.
    - Să se calculeze aria triunghiului  $ABD$ .
    - Să se scrie ecuația dreptei  $AB$ .
  - Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 + x & -x \\ x & x - 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
    - Calculați  $A(1) + A(2) + A(3)$ .
    - Calculați  $A(0) A(2) A(3)$ .
    - Aflați  $x$ , știind că  $A(x) = I_2$ .
  - Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
    - Calculați  $\det A$ .
    - Arătați că  $2AB - BA + I_2$ .
    - Aflați  $x$ , număr real, pentru care  $AA - xA = I_2$ .
- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
  - Subiectele 1, 2 și 3 au câte 30 puncte.
  - Timpul efectiv de lucru este de 50 minute

## TEMA 8

## LEGI DE COMPOZIȚIE

Def 1. Fie  $M$  o multime. Operația  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  se numește lege de compoziție internă pe  $M$  (adică dacă compunem  $x$  și  $y$ , 2 elemente din  $M$ ,  $x * y$  este tot din  $M$ ).

Def 2. Legea  $*$  este bine definită, dacă  $\forall x, y \in M, x * y \in M$

Def 3. O lege  $*$  se numește asociativă, dacă  $\forall x, y, z \in M, (x * y) * z = x * (y * z)$  (de exemplu, dacă vrem să calculăm  $2 \cdot 3 \cdot 5$ , putem face înmulțirea în mai multe moduri: a) mai întâi, calculez  $2 \cdot 3$ , 6 și apoi înmulțesc cu 5 = 30 b) pot înmulți mai întâi,  $3 \cdot 5$ , 15 și apoi înmulțesc și cu 2, = 30 rezultatul e același și nu are importanța ce înmulțire fac prima. Această proprietate se numește asociativitate).

Def 4. O lege  $*$  se numește comutativă, dacă  $\forall x, y \in M, x * y = y * x$  (de exemplu,  $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ , adică nu contează ordinea în care scriem termenii, rezultatul e același)

Def 5. Fie  $e$  un element din mulțimea  $M$ .  $e$  se numește element neutru al legii  $*$ , dacă  $\forall x \in M$ , atunci  $x * e = e * x = x$  (de exemplu, la înmulțire,  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ , adică 1 este elementul neutru la înmulțire).

Def 6. Fie  $x'$  un element din  $M$ .  $x'$  se numește inversul lui  $x$  față de legea  $*$ , dacă  $x * x' = x' * x = e$  (de exemplu, inversul lui 5 față de înmulțire, este  $5 \cdot 1/5 = 1$ ;  $1/5 \cdot 5 = 1$ , 1 fiind elementul neutru).

Exerciții. 1) Fie  $M = (2, +\infty)$ . Pe  $M$ , definim legea  $x * y = x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6$ .

Verificați:

- Asociativitatea:
- Comutativitatea.
- Determinați elementul neutru
- Determinați inversul lui  $x$
- Verificați dacă legea  $e$  este bine definită

a) Trebuie să verificăm dacă  $\forall x, y, z \in M, (x * y) * z = x * (y * z)$

$(x * y) * z =$  mai întâi, facem compunerea numerelor din paranteză (întai înmulțim cele 2 numere, apoi scădem  $2 \cdot$  primul, scădem  $2 \cdot$  al doilea și adunăm 6.

$$= (x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6) * z = \text{acum primul număr înseamnă toată paranteza, al doilea } z$$

$$= (x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6) \cdot z - 2 \cdot (x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6) - 2 \cdot z + 6$$

$$= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6$$

Calculăm și cel de al doilea termen,  $x * (y * z)$

$$x * (y * z) = x * (y \cdot z - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 6) \text{ am făcut operația din paranteza}$$

acum primul număr este  $x$ , al doilea toată paranteza

$$= x \cdot (y \cdot z - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 6) - 2 \cdot x - 2 \cdot (y \cdot z - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 6) + 6$$

$$= xyz - 2xy - 2xz + 6x - 2x - 2yz + 4y + 4z - 12 + 6.$$

Observăm că am obținut același lucru, deci legea este asociativă.

b) trebuie să verificăm dacă  $\forall x, y \in M, x * y = y * x$

$$x * y = y * x$$

$$x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6 = y \cdot x - 2 \cdot y - 2 \cdot x + 6, \text{ deci am obținut același lucru, deoarece } x \cdot y = y \cdot x.$$

c)  $e$  este elem neutru, dacă  $\forall x \in M$ , atunci  $x * e = e * x = x$ .

$$x * e = x$$

$x \cdot e - 2 \cdot x - 2 \cdot e + 6 = x$ ; dam pe  $e$  factor comun, pe ceilalți îi trec după egal, cu semn schimbat

$$e \cdot (x - 2) = x + 2 \cdot x - 6, \text{ deci } e = \frac{3x - 6}{x - 2} = 3. \quad 3 \in M = (2, +\infty) \text{ deci } 3 \text{ este elem neutru.}$$

d)  $x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = 3$$

$x \cdot x' - 2 \cdot x - 2 \cdot x' + 6 = 3$ ; dam pe  $x'$  factor comun,

$x' \cdot (x - 2) = 3 - 6 + 2 \cdot x \Rightarrow x' = \frac{2x - 3}{x - 2}$ . Mai trebuie verificat dacă  $x' \in M = (2, +\infty)$ , deci dacă e mai mare ca 2.

$\frac{2x - 3}{x - 2} > 2 \Leftrightarrow 2x - 3 > 2x - 4$ , ceea ce este adevărat. Deci, inversul lui  $x$  este  $x' = \frac{2x - 3}{x - 2}$ . Dacă vrem să

calculăm inversul lui 5, este:  $= \frac{2 \cdot 5 - 3}{5 - 2} = \frac{7}{3}$

e) Legea este bine definită, dacă pentru  $x \in M, y \in M$  și  $x * y \in M$ .

$x * y = x \cdot y - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 6 =$  dam factor pe  $x$ , între primii 2, între ultimii 2, pe  $-2$ . vreau să obțin paranteza  $(y - 2)$  de 2 ori, să mai pot da factor comun

$$= x \cdot (y - 2) - 2 \cdot (y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2$$

Cum  $x > 2, y > 2$ , avem că  $x - 2 > 0$  și  $y - 2 > 0$ , deci  $(x - 2)(y - 2) + 2 > 0 + 2, > 2$ , adică

$x * y > 2$ , deci  $x * y \in M$

Ex 2. Fie  $M = (3, +\infty)$ . Pe  $M$ , definim legea  $x * y = x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 12$ .

a) Verificați dacă  $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$

b) Rezolvați ecuația  $x * 4 = 5$

c) Rezolvați ecuația  $x * 3 = 3$

d) Calculați  $1 * 2 * 3 * 4 * \dots * 100 =$

e) Demonstrați că  $x * x * x * \dots * x = (x - 3)^n + 3$   
de n ori

f) Rezolvați ecuația  $x * x * x * x = 19$   
de 4 ori

a) Trebuie arătat că  $x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = (x-3)(y-3) + 3$ ; desfacem parantezele

$$(x-3)(y-3) + 3 = x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 9 + 3 = x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 12$$

b)  $x * 4 = 5 \Rightarrow x \cdot 4 - 3 \cdot x - 3 \cdot 4 + 12 = 5 \Rightarrow 4x - 3x - 12 + 12 = 5 \Rightarrow x = 5$

c)  $x * 3 = (x-3)(3-3) + 3 = 3$ . (am aplicat formula echivalentă de la punctul a); pentru a-mi ușura calculele; nu e greșit să se aplice și formula dată la începutul exercițiului

Deci,  $x * 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ , adică ecuația este adevărată  $\forall x \in M$  (asta înseamnă că orice număr, compus cu 3, se obține rezultatul 3)

d)  $1 * 2 * 3 * 4 * \dots * 100 = 3$ , folosind punctul c) unde am arătat că orice număr, compus cu 3, este 3.

e)  $x * x * x \dots * x = (x-3)^n + 3$ . Aceasta se demonstrează prin inducție matematică. Aceasta are 2 etape:

I. Etapa verificării verificăm relația pentru  $n=2$

$$\underset{\text{de } 2 \text{ ori}}{x * x} = (x-3)^2 + 3, \text{ relație adevărată (ridicăm la pătrat și obținem } x * y = x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 12)$$

II. Etapa demonstrației. Presupun formula adevărată pentru 'n' și demonstrez pentru 'n+1', adică mai compun odată să vad dacă se păstrează formula.

Deci, presupun că  $\underset{\text{de } n \text{ ori}}{x * x * x \dots * x} = (x-3)^n + 3$

Vreau să arăt că  $\underset{\text{de } n+1 \text{ ori}}{x * x * x \dots * x} = (x-3)^{n+1} + 3$

$$\underset{\text{de } n+1 \text{ ori}}{x * x * x \dots * x} = (\underset{\text{de } n \text{ ori}}{x * x * x \dots * x}) * x = ((x-3)^n + 3) * x$$

aplic legea de la punctul a), adică scad 3 la primul număr, scad 3 la al doilea număr, le înmulțesc și apoi adun 3  $\Rightarrow$

$$= ((x-3)^n + 3 - 3)(x-3) + 3$$

$$= (x-3)^n(x-3) + 3 = (x-3)^{n+1} + 3, \text{ ce vroiam să demonstrăm.}$$

f)  $\underset{\text{de } 4 \text{ ori}}{x * x * x * x} = 19$ . Aplic formula de la e) și  $\underset{\text{de } 4 \text{ ori}}{x * x * x * x} = (x-3)^4 + 3$

deci avem ecuația  $(x-3)^4 + 3 = 19$ . Scădem 3,  $(x-3)^4 = 16$ . Aplic radical,

$$(x-3)^2 = \pm 4.$$

- Ecuația  $(x-3)^2 = -4$  nu are soluții reale.

- Ecuația  $(x-3)^2 = 4$ : aplic iar radical  $\Rightarrow x-3 = \pm 2$ , deci  $x = 5$  și 1.

## FIȘĂ DE LUCRU 1 - LEGI DE COMPOZIȚIE

1. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$ 
  - a) Arătați că  $x * y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$
  - b) Găsiți elementul neutru al legii de compoziție
  - c) Determinați  $x \in \mathbf{Z}$ , astfel încât  $x * x * x * x = 129$
  
2. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2(x + y) + 6$ .
  - a) Să se verifice că  $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$
  - b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x = x$
  
3. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ .
  - a) Să se demonstreze că legea de compoziție este asociativă
  - b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție
  - c) Să se determine mulțimea elementelor simetrizabile ale lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție
  
4. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy - x - y + 2$ 
  - a) Arătați că  $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$
  - b) Calculați  $0 * 1 * 2 * 3$
  - c) Determinați numerele reale  $a$ , știind că  $a * a * 2016 = 2016$ .
  
5. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy + 2x + 2y + 2$ 
  - a) Arătați că  $x * y = (x + 2)(y + 2) - 2$ , pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$
  - b) Calculați  $(-2015) * (-2) * 0 * 2 * 2015$
  - îc) Determinați numerele naturale  $n$ , știind că numărul  $n * (-n)$  este natural.
  
6. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy + 4x + 4y + 12$ 
  - a) Arătați că  $0 * (-4) = -4$
  - b) Arătați că  $x * y = (x + 4)(y + 4) - 4$ , pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$
  - c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x = 12$

## FIȘĂ DE LUCRU 2 - LEGI DE COMPOZIȚIE

1. Pe  $\mathbf{Z}$  definim operația  $x * y = x + y + 5$ . Calculați

a)  $2 * (-7)$

b) Determinați  $x$  știind că  $x * x * x = 15$

2. Verificați dacă legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y$  este comutativă.

3. Calculați:

a)  $\int_{-1}^1 x(2x - 1)^2 dx$ .

b)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$ .

c)  $\int_1^2 \left( \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x} + 2x\sqrt{x} \right) dx$ .

4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .

a) Arătați că  $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4, \forall x, y \in \mathbf{R}$ .

b) Determinați elementul neutru al legii " $\circ$ ".

c) Determinați elementele simetrizabile al legii " $\circ$ ".

d) Precizați dacă  $(\mathbf{R}, \circ)$  formează o structură de grup.

e) Calculați  $(-2019) \circ (-2018) \circ \dots \circ 2018 \circ 2019$

5. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + 3$ .

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x^2 * (x + 1) = 6$ .

6. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 1 \\ x^2 + x - 1, & x < 1 \end{cases}$

a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbf{R}$ .

b) Pentru  $x \geq 1$ , să se determine primitiva  $F: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  a funcției  $f$ , care verifică  $F(1) = 5$ .

7. Se consideră funcțiile  $f, F: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{x}$  și  $F(x) = x^3 + x + \ln x - 2$ .

a) Arătați că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

b) Calculați  $\int_1^2 \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$ .

8. Se consideră polinomul  $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$ .

- Calculați  $f(0)$ .
- Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X^2 - 4$ .
- Arătați că  $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 20$  știind că  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile lui  $f$ .

9. În  $\mathbb{R}[X]$  se consideră polinomul  $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$ .

- Arătați că polinomul  $f$  se divide cu  $X - 1$ .
- Calculați  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .
- Verificați dacă  $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$ .

10. Se consideră  $x_1, x_2$  și  $x_3$  rădăcinile complexe ale polinomului  $f = X^3 + X^2 + mX + m$ , unde  $m$  este un număr real.

- Arătați că  $f$  este divizibil cu  $X + 1$ , pentru orice număr real  $m$ .
- Determinați numărul real  $m$  pentru care  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$ .

11. Se consideră polinomul  $f = X^3 - mX + 2$ , unde  $m$  este număr real.

- Arătați că  $f(0) = 2$ .
- Determinați numărul real  $m$ , știind că restul împărțirii lui  $f$  la polinomul  $g = X^2 + X - 2$  este egal cu 0.
- Demonstrați că  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$ , pentru orice număr real  $m$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

12. Se consideră polinomul  $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$ .

- Arătați că  $f(-5) = 0$ .
- Determinați câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $X^2 + 6X + 5$ .
- Demonstrați că  $\frac{x_3}{x_1 x_2} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_1}{x_2 x_3} = -\frac{23}{5}$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

13. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Arătați că  $\det A = 1$ .
- Arătați că  $A \cdot A + I_2 = O_2$ , unde  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Demonstrați că  $\det(A - aI_2) \geq 1$ , pentru orice număr real  $a$ .

## TEMA 9

## LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE. ASIMPTOTE

## 9.1. Limite de funcții

*Cazuri exceptate și neexceptate la operații cu limite de funcții*

I. În calculul limitelor de funcții se întâlnesc următoarele **cazuri exceptate** sau **forme nedeterminate**, care se mai numesc și **nedeterminări** și se scriu simbolic astfel:

$$\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; \frac{0}{0}; 1^{\infty}; 0^0; 0 \cdot \infty; \infty^0.$$

II. În calculul limitelor de funcții se întâlnesc următoarele **cazuri neexceptate**, care nu cer eliminarea nedeterminărilor, dar se calculează direct (nemijlocit).

• **Cazurile neexceptate** se scriu simbolic astfel:

$$1) \frac{1}{\pm \infty} = 0; \quad 2) \frac{a}{\pm \infty} = 0, \forall a \in R^*; \quad 3) \frac{1}{0-0} = -\infty; \quad 4) \frac{1}{0+0} = +\infty;$$

$$5) \frac{1}{0} = \pm \infty; \quad 6) \frac{a}{0-0} = \operatorname{sgn}(a) \cdot (-\infty), \forall a \in R^*;$$

$$7) \frac{a}{0+0} = \operatorname{sgn}(a) \cdot (+\infty), \forall a \in R^*; \quad 8) \infty + \infty = +\infty; \quad 9) \infty^{\infty} = \infty;$$

$$10) \infty^{-\infty} = 0; \quad 11) (\pm \infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty); \quad 12) -\infty + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty;$$

$$13) a \cdot (\pm \infty) = \operatorname{sgn}(a) \cdot (\pm \infty); \quad 14) a \pm \infty = \pm \infty, \text{ unde } a \in R^*, (a \text{ este un număr real mărginit});$$

$$15) 0^{\infty} = 0; \quad 16) (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty; \quad 17) (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty;$$

$$18) \frac{\pm \infty}{a} = \operatorname{sgn}(a) \cdot (\pm \infty), \forall a \in R^*; \quad 19) \infty^{\alpha} = +\infty, \text{ dacă } \alpha > 0; \quad 20) \infty^{\alpha} = 0, \text{ dacă } \alpha < 0.$$

*III. Limite laterale ale funcției  $f : D \rightarrow R, y = f(x)$ :*

1) *Limita de stânga* a funcției  $f$  în punctul este numărul  $l_s$ :

$$l_s(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s;$$

2) *Limita de dreapta* a funcției  $f$  în punctul este numărul  $l_d$ :

$$l_d(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$$

**Definiția :** Numerele reale  $l_d(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  și  $l_s(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  se

numesc **limite laterale** ale funcției  $f : D \rightarrow R, D \subseteq R$  în punctul  $x_0 \in R$ .

**Teorema 2a (Condiția necesară și suficientă de existență a limitei funcției într-un punct) :**

Fie  $D \subset R, x_0 \in R, f : D \rightarrow R, D \subseteq R$  și  $x_0$  un punct de acumulare pentru mulțimile  $D \cap (x_0; +\infty)$  și  $D \cap (-\infty; x_0)$ . Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$ , atunci ea are limite laterale egale în punctul  $x_0$  și au loc egalitățile  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$

2. Dacă funcția  $f$  are limite laterale egale în punctul  $x_0$ , adică  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ , atunci funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  și au loc egalitățile  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ .

**Teorema 2b (criteriul de existență a limitei funcției într-un punct) :**

Funcția  $f : D \rightarrow R, D \subseteq R$  are limită în punctul de acumulare  $x_0 \in R$  al mulțimii  $D$  dacă și numai dacă ea are limite laterale egale în punctul  $x_0$ .

• **Conform teoremelor 2a și 2b:**

1) Dacă  $l_s(x_0) = l_d(x_0)$ , atunci  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_s(x_0) = l_d(x_0)$ ;

2) Dacă  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ , atunci  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și are loc egalitatea  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ ;

3) Dacă există limitele laterale și ele sunt egale, adică  $l_s(x_0) = l_d(x_0) = l$ , atunci există limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

## 9.2. Limite remarcabile și fundamentale de funcții reale

### I. Limite remarcabile de funcții reale:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad 3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Numărul  $e = 2,718281828459045268\dots$  este un număr irațional numit **numărul lui Euler**.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \forall a > 0; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \forall a > 0, a \neq 1; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad 13) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$14) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \cdot \ln x = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

$$15) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a^x}{x^n} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 < a < 1, a \in \mathbb{R} \\ +\infty, & \text{pentru } a > 1, a \in \mathbb{R} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$18) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1; \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2; \quad 21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{x^2} = \frac{k^2}{2}.$$

Dacă  $x \rightarrow 0$ , atunci:

$$1) \sin x \rightarrow x; \quad \arcsin x \rightarrow x; \quad \operatorname{tg} x \rightarrow x; \quad \operatorname{arctg} x \rightarrow x;$$

$$2) \sin kx \rightarrow kx; \quad \arcsin kx \rightarrow kx; \quad \operatorname{tg} kx \rightarrow kx; \quad \operatorname{arctg} kx \rightarrow kx.$$

$$3) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1; \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{kx} = 1; \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{kx} = 1; \quad \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{kx} = 1.$$

a) Pentru demonstrarea limitelor remarcabile 1) și 2) se aplică dubla inegalitate:

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \text{ unde } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

b) În *caz general* au loc următoarele formule pentru limite uzuale:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{g(x)} - 1}{g(x)} = \ln a, \forall a > 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+g(x))}{g(x)} = \frac{1}{\ln a}, \forall a > 0, a \neq 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+g(x))}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+g(x))^\alpha - 1}{g(x)} = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin g(x)}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin g(x)}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} g(x)}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} g(x)}{g(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

## II. Limite fundamentale de funcții reale

**Observație:** Pentru funcțiile elementare  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$  există limita lor în punctul  $x_0 \in D$  și ea este egală cu valoarea funcției în acest punct:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

### Metode de calculare a limitei funcției:

- I. Se aplică definiția limitei funcției;
- II. Se aplică criteriile de existență ale limitei funcției;
- III. Se aplică formulele 1)-18) de mai sus;
- IV. Se aplică regulile lui L'Hospital;
- V. Se aplică limite fundamentale de funcții reale de mai jos.

### Limite neexceptate ale unor funcții elementare

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \begin{cases} 0, & \text{pentru } |q| < 1 \\ 1, & \text{pentru } q = 1 \\ \infty, & \text{pentru } q > 1 \\ \text{nu exista,} & \text{pentru } q \leq -1 \end{cases}, \text{ unde } q \in \mathbb{R}.$$

2) Dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  și

$Q_k(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  sunt două polinoame cu coeficienți reali, atunci:

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} P_m(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + ax + a_0) = P_m(x_0);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} Q_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_2 x^2 + bx + b_0) = Q_k(x_0);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P_m(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q_k(x)} = \frac{P_m(x_0)}{Q_k(x_0)}, \text{ dacă } Q_k(x_0) \neq 0;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_m(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_m x^m) = a_m \cdot (\pm\infty) = \text{sgn}(a_m) \cdot (\pm\infty);$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{b_k x^k} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } m < k \\ \frac{a_m}{b_k}, & \text{pentru } m = k \\ +\infty, & \text{pentru } m > k \text{ și } a_m \cdot b_k > 0 \\ -\infty, & \text{pentru } m > k \text{ și } a_m \cdot b_k < 0 \end{cases}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_m x^m}{b_k x^k} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } m < k \\ \frac{a_m}{b_k}, & \text{pentru } m = k \\ -\infty, & \text{pentru } m > k \text{ și } a_m \cdot b_k > 0 \\ +\infty, & \text{pentru } m > k \text{ și } a_m \cdot b_k < 0 \end{cases}$$

$$3) \quad a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty; \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty; \quad c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} = 0, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty; \quad e) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$4) \quad a) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ dacă } a > 1; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ dacă } a > 1;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ dacă } 0 < a < 1; \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \text{ dacă } 0 < a < 1;$$

$$5) \quad a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \text{ dacă } a > 1 \text{ și } a \in \mathbb{R};$$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty, \text{ dacă } a > 1 \text{ și } a \in \mathbb{R};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \text{ dacă } 0 < a < 1 \text{ și } a \in \mathbb{R};$$

$$d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty, \text{ dacă } 0 < a < 1 \text{ și } a \in \mathbb{R}.$$

$$6) \quad a) \lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0, \forall x_0 > 0; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad c) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

- 7) a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lg x = \lg x_0, \forall x_0 > 0$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$ ; c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \lg x = -\infty$ .
- 8) a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ .
- 9) a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \forall x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$ .
- 10) a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ .
- 11) a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$ .

Pentru determinarea și reținerea limitelor funcțiilor din punctele 3) – 11) se aplică reprezentările grafice (graficele) ale funcțiilor respective.

### 9.3. Funcții continue

**Definiție** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D$

$f$  este continuă în  $x_0 \in D$  dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Dacă  $f$  nu este continuă în  $x_0 \in D$ , ea se numește discontinuă în  $x_0$ , iar  $x_0$  se numește punct de discontinuitate.

**Definiții:** Un punct de discontinuitate  $x_0 \in D$  este punct de discontinuitate de prima speță pentru  $f$ , dacă limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  există și sunt finite.

Un punct de discontinuitate  $x_0 \in D$  este punct de discontinuitate de speța a doua dacă nu este de prima speță. (cel puțin una din limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  nu este finită sau nu există)

**Teoremă:** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D \Rightarrow f$  continuă în  $x_0$   
 $\Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$

**Teoremă:** Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiție.

**Operații cu funcții continue**

**Teoremă:** Fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  continue pe  $D$

$\Rightarrow f+g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0), |f|, \max(f, g), \min(f, g)$  sunt funcții continue pe  $D$ .

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

**Teoremă:** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă a.î.  $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$  pentru care  $f(c) = 0$ .

### 9.4. Asimptote

Fie  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D'$ .

**Definiție:** Funcția  $f : D \rightarrow R$  are dreapta  $y = b$  asimptotă orizontală la  $-\infty$  dacă

$$D \supset (-\infty, b), b \in R$$

și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , respectiv, funcția  $f : D \rightarrow R$  are dreapta  $y = a$  asimptotă orizontală la  $+\infty$  dacă

$$D \supset (a, \infty), a \in R \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a.$$

**Definiție:** Funcția  $f : D \rightarrow R$  are dreapta  $x = a$  asimptotă verticală dacă cel puțin una dintre limitele  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  există și este infinită.

**Definiție:**

Dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă oblică la ramura spre  $-\infty$  a funcției

$$f : D \rightarrow R, D \supset (-\infty, b), b \in R,$$

dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx - n] = 0$ , respectiv,

dreapta  $y = m'x + n'$  este asimptotă oblică la ramura spre  $+\infty$  a funcției

$$f : D \rightarrow R, D \supset (a, +\infty), a \in R,$$

dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0$ ,

unde:  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$ , iar

$$m' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, n' = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m'x].$$

O funcție nu poate avea simultan asimptote orizontale și asimptote oblice spre  $-\infty$ , sau spre  $+\infty$ .

**I. Asimptotă orizontală.**

Dacă  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$  atunci dreapta  $y = \alpha$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$  atunci dreapta  $y = \alpha$  este asimptotă orizontală la  $-\infty$ .

**II. Asimptota oblică.**

La  $+\infty$  este dreapta  $y = mx + n$  unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$$

La  $-\infty$  este dreapta  $y = mx + n$  unde

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}$$

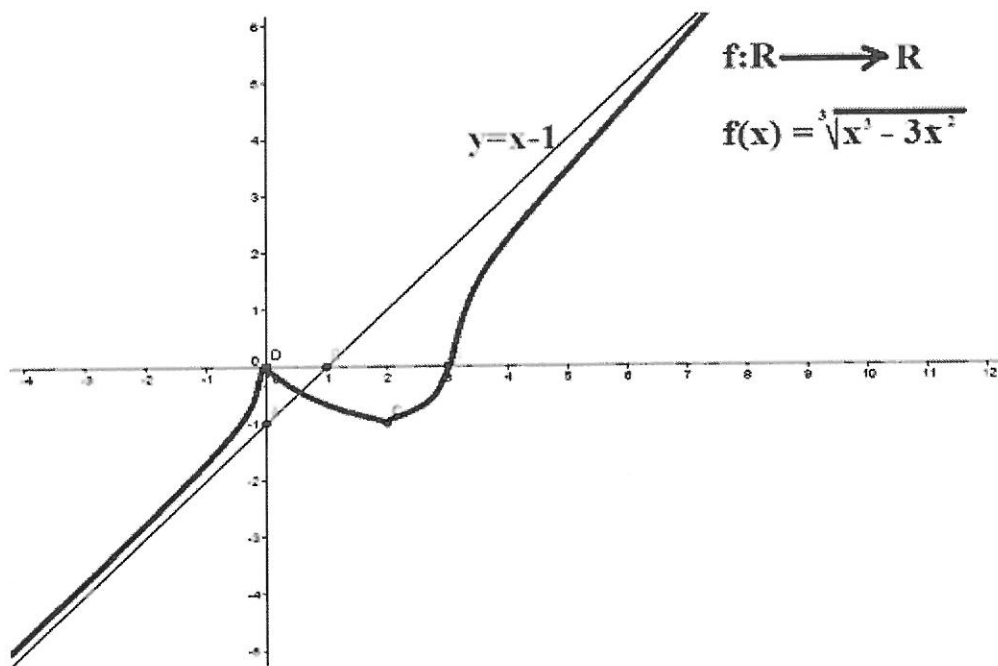
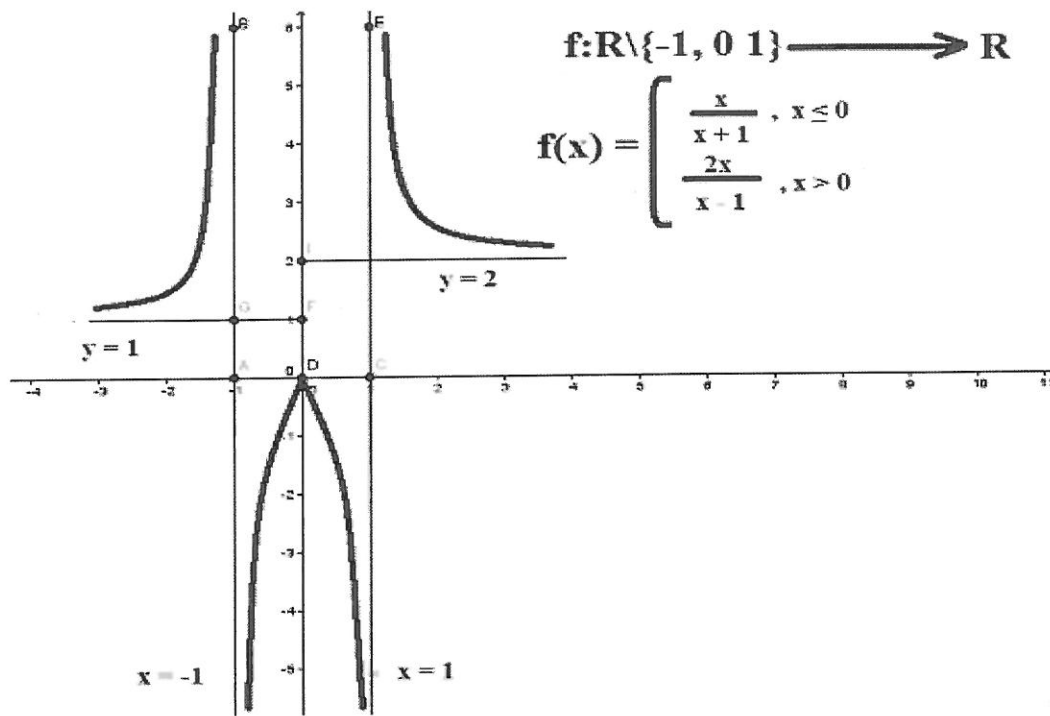
$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx$$

**III. Asimptota verticală.**

Dacă  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \pm\infty$  atunci dreapta  $x = \alpha$  este asimptotă verticală la dreapta.

Dacă  $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \pm\infty$  atunci dreapta  $x = \alpha$  este asimptotă verticală la stânga.

Exemple:



- 1) Determinați asimptota orizontală la  $+\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ .
- 2) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ .
- 3) Determinați asimptota orizontală la  $+\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$ .
- 4) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+6x+1}{x^2+9}$ .
- 5) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- 6) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+5}{e^x+1}$ .
- 7) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x+2x-5}{e^x+1}$ .
- 8) Determinați asimptota orizontală a funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x+6}$ .
- 9) Determinați asimptota oblică la  $+\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$ .
- 10) Determinați asimptota oblică la  $+\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$ .
- 11) Determinați asimptota oblică a funcției  $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x-5}$ .
- 12) Determinați asimptota oblică la  $+\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x^2+x-7}{x-2}$ .
- 13) Determinați asimptota oblică la  $-\infty$  a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + 2x + 1$ .
- 14) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ .
- 15) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{4-x}$ .
- 16) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3+x}{x}$ .
- 17) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ .
- 18) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .
- 19) Determinați asimptota verticală a funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 7 \ln x$ .

## TEMA 10

## DERIVABILITATE. ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

### Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

- intervine în stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile și a punctelor de extrem.

Un rol important în studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor îl are teorema lui Lagrange:

- Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$  atunci există  $c \in (a, b)$  astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Reamintim:

- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este monoton descrescătoare pe  $I$  dacă  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este monoton crescătoare pe  $I$  dacă  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Teorema lui Lagrange are următoarea consecință, utilă pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții:

- Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $I$ . Atunci
  - 1) funcția este monoton descrescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă  $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$
  - 2) funcția este monoton crescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă  $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ .

### Observații

- a) dacă  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $f'(x) < 0, \forall x \in I$ , respectiv  $f'(x) > 0, \forall x \in I$ , atunci  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ , respectiv strict crescătoare.
- b) Etapele stabilirii intervalelor de monotonie ale unei funcții  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt următoarele:
  - se calculează  $f'(x)$
  - se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$
  - se stabilește semnul funcției  $f'$  pe intervalele pe care nu se anulează
  - se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei cu ajutorul tabelului de variație al funcției.

### Puncte de extrem

Reamintim:

- Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  este punct de *minim relativ* (local) dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât,  $\forall x \in V \cap I$ , avem  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  este punct de *maxim relativ* (local) dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât,  $\forall x \in V \cap I$ , avem  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- Punctele de minim sau maxim relativ ale unei funcții se numesc *puncte de extrem relativ* ale funcției.
- Valorile funcției în punctele de extrem se numesc *extremele* funcției.

Un rol important în determinarea punctelor de extrem ale unei funcții îl are teorema lui Fermat:

- Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă. Dacă  $x_0 \in (a, b)$  este punct de extrem, atunci  $f'(x_0) = 0$  (în punctele de extrem din interiorul intervalului derivata se anulează).

### Observații

- Reciproca acestei teoreme nu este o propoziție adevărată. Dacă  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in (a, b)$  nu rezultă că  $x_0$  este punct de extrem.
- Rezultă din această teoremă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile se găsesc printre rădăcinile derivatei.
- Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă, și  $x_0$  se află în interiorul intervalului  $I$  cu  $f'(x_0) = 0$ , atunci:
  - dacă în stânga lui  $x_0$  derivata este negativă, iar în dreapta pozitivă, punctul  $x_0$  este punct de minim;
  - dacă în stânga lui  $x_0$  derivata este pozitivă, iar în dreapta negativă, punctul  $x_0$  este punct de maxim.
- Studiul monotoniei funcției și găsirea extremelor folosesc la stabilirea unor inegalități.
- Pentru o mai mare ușurință a studiului vom alcătui în majoritatea cazurilor tabelul de variație al funcției.

### Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

- determinarea intervalelor de convexitate și de concavitate
- determinarea punctelor de inflexiune

1.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și

1.  $f$  continuă pe  $[a, b]$

2.  $f$  este de două ori derivabilă pe  $(a, b)$

atunci

a)  $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$  convexă pe  $[a, b]$

b)  $f''(x) \leq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$  concavă pe  $[a, b]$

Etape pentru determinarea intervalelor de convexitate și de concavitate

Etapa I. Calculăm  $f''$  pe domeniul de derivabilitate.

Etapa II. Rezolvăm ecuația  $f''(x) = 0$  pe domeniul de derivabilitate.

Etapa III. Determinăm semnul funcției  $f''$  pe intervalele pe care nu se anulează.

Utilizăm proprietatea funcțiilor continue de a păstra semn constant pe intervalele pe care nu se anulează.

Etapa IV. Stabilim intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției  $f$ .

2.  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $x_0 \in I$  (interior  $I$ ) punct de continuitate. Dacă

a)  $f$  este de două ori derivabilă într-o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$

b) există punctele  $a, b \in V$  astfel încât  $x_0 \in (a, b)$

c)  $f''(x_0) = 0$

d)  $f''(x) < 0, \forall x \in (a, x_0), f''(x) > 0, \forall x \in (x_0, b)$  sau invers

atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

#### De reținut:

a) Pentru a studia monotonia unei funcții și a-i determina punctele de extrem, trebuie să parcurgem următoarele etape:

1. Determinăm domeniul maxim de definiție.
2. Calculăm  $f'$  și determinăm domeniul de definiție al funcției derivată.
3. Aflăm punctele critice, adică determinăm soluțiile ecuației  $f'(x) = 0$ .
4. Studiem semnul derivatei.
5. Întocmim tabelul de variație.

**Tabelul de variație** este tabelul în care introducem datele obținute în urma parcurgerii etapelor descrise mai sus. Pe prima linie a tabelului se trec soluțiile ecuației  $f'(x) = 0$ , dar și capetele domeniului de definiție al funcției. Dacă funcția este definită pe dreapta reală ( $\mathbb{R}$ ), în tabel vom trece  $-\infty$  și  $+\infty$  la marginile primei linii. Pe a doua linie vom scrie 0 sub fiecare rădăcină de pe prima linie și între 0-uri vom trece semnele funcției derivată pe intervalele respective. Pe ultima linie vom calcula valorile funcției în punctele determinate (soluțiile ecuației  $f'(x) = 0$ ) și valorile funcției în capetele intervalului sau limitele în capetele intervalului. Între valorile sau limitele funcției calculate anterior vom trece săgeți, astfel:

- dacă pe linia de mai sus (linia derivatei) avem semnul " + " pe un interval, vom trece semnul " ↗ " (înseamnă că funcția "crește" pe acel interval);

- dacă pe linia corespunzătoare derivatei avem semnul " - " vom completa tabelul cu săgeata " ↘ " (atunci funcția "descrește").

- Citim rezultatele din tabel.

### FISA DE LUCRU

Să se studieze monotonia și punctele de extreme pentru următoarele funcții

-  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x$ .

-  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln(x+1) - x$ .

-  $f: \mathbf{R} - \{3\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ .

-  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - \ln x$

-  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x (5x + 10)$

-  $f: \mathbf{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

b) Pentru a studia **concavitatea/ convexitatea** unei funcții și a-i determina **punctele de inflexiune**, trebuie să parcurgem următoarele etape:

1. Calculăm prima derivată a funcției.
2. Calculăm a doua derivată a funcției.
3. Rezolvăm în mulțimea nr. Reale ecuația  $f''(x) = 0$
4. Studiem semnul derivatei.
5. Întocmim tabelul de variație.

Citim rezultatele din tabel. **f-convexă** dacă și numai dacă  $f''(x) \geq 0$   
**f-concavă** dacă și numai dacă  $f''(x) \leq 0$

### FISA DE LUCRU

Să se determine intervalele de convexitate și concavitate și punctele de inflexiune ale următoarelor funcții:

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

b)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x x$

c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x (x-2)$

d)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x (x^2 + 1)$

e)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 12x$

f)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

## TEST DE EVALUARE

- 0,50p 1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ .
- a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x(x+1)(3x+1)} = \frac{1}{3}$
- 1p b) Determinați intervalele de monotonie
- 0,50p c) Demonstrați că  $f(x) \geq -\frac{4}{27}$
- 1p 2. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x}$ . Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
3. Se consideră funcția  $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{x - 1}$
- 1p a) Calculați asimptota verticală la graficul funcției.
- 1p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției pentru  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
- 1p 4. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x - \ln x$ .
- a) Calculați derivate funcției
- 1p b) Să se arate că  $f$  este convexă pe  $(0, \infty)$ .
- 1p 5. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ .
- 0,50p a) Calculați derivata funcției.
- 0,75p b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - f(x)}{f'(x)}$
- 0,75p c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x=1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 60 minute

## FISA DE LUCRU

- Valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$  este:
  - 1;
  - 1;
  - 9;
  - 9
- Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$  este:
  - 1;
  - 1;
  - 0;
  - nu există.
- Valoarea derivatei de ordinul doi al funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 1)\ln x$  este:
  - $2\ln x + 3$ ;
  - $\ln x - \frac{1}{x}$ ;
  - $\ln x - \frac{1}{x} + 3$ ;
  - $2\ln x - \frac{1}{x} + 3$
- Valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$  este:
  - 1;
  - 1;
  - 0;
  - 2
- Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  este:
  - 1;
  - 1;
  - 6;
  - nu există.
- Valoarea derivatei de ordinul doi al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$  este:
  - $(x^2 + 4x + 3)e^x$ ;
  - $(x^2 + 4x + 1)e^x$ ;
  - $(x^2 + 4x)e^x$ ;
  - $(x^2 + x + 3)e^x$
- Valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  este:
  - 5;
  - 1;
  - 0;
  - 2
- Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$  este:
  - 1;
  - 8;
  - 6;
  - nu există.
- Valoarea derivatei de ordinul doi al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$  este:
  - $(x^2 + 4x + 2)e^x$ ;
  - $(x^2 + 6x + 6)e^x$ ;
  - $(x^2 - 4x + 2)e^x$ ;
  - $(x^2 + 4x - 2)e^x$ .
- Asimptota orizontală a funcției  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$  este :  
 $y = 1$  b)  $y = 2$  c)  $y = 0$  d) nu există
- Derivata întâi a funcției  $f: \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3}$  este:
  - $\frac{13}{(2x + 3)^2}$ ;
  - $\frac{x}{(2x + 3)^2}$ ;
  - $\frac{1}{(2x + 3)^2}$ ;
  - $\frac{2x}{(2x + 3)^2}$ .
- Se dă matricea  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$  valoarea determinantului lui A pentru  $a = 0$  este:
  - 2;
  - 2;
  - 0;
  - 1
- Se consideră funcția  $f(x) = x + \cos x$ ,  $f''(x)$  este:
  - $1 - \sin x$ ;
  - $1 + \cos x$ ;
  - $\cos x$ ;
  - $-\cos x$
- Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3 \ln x$ ;  $f'(1)$  este egal cu:
  - 1;
  - 0;
  - 1;
  - 3
- Fie matricea  
 $A = \begin{pmatrix} x + 3 & 1 \\ 1 & x + 3 \end{pmatrix}$ . Pentru  $x = -2$   $\det A$  este egal cu :
  - 1;
  - 1;
  - 0;
  - 2
- Valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$  este:
  - 1;
  - 2;
  - 0;
  - 1
- Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 4x + 4$  derivata a doua a funcției este:
  - $4x^3 - 4$ ;
  - $12x^2$ ;
  - $12x$ ;
  - $4x^3$ ;
- Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$   $f'(0) + f''(0) = \dots$ 
  - 8;
  - 8;
  - 4;
  - 0

## TEMA 11

## PRIMITIVE. METODE DE CALCUL

## 11.1. Probleme de existența a primitivelor

Dată fiind o funcție  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  ( $J \subseteq \mathbb{R}$ ) ne punem problema dacă admite sau nu primitive.

Studiind rezolvarea exercițiilor privind existența primitivelor unei funcții se observă că majoritatea acestora pot fi grupate pe câteva „tipuri”, în felul acesta evidențiindu-se câteva metode de rezolvare a lor.

## Funcții care admit primitive

Pentru a arăta că o funcție admite primitive este suficient să demonstrăm (dacă este cazul) că  $f$  este continuă pe  $J$  sau să scriem  $f$  ca sumă de funcții primitivabile, sau să indicăm o primitivă a funcției în caz că există.

## Exemple

1. Să se arate că  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+2}} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{e}, & x = 0 \end{cases}$  admite primitive.

## Soluție

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  și  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ , deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . În concluzie  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

## Observație

Nu trebuie trasă concluzia că, dacă  $f$  nu este continuă pe interval, nu poate admite primitive. Există funcții discontinue (cu discontinuități de speța a II-a) care admit primitive, deci mulțimea funcțiilor primitivabile este mai vastă decât cea a funcțiilor continue ( $C \subset P$ ).

2. Funcții discontinue care admit primitive sunt și funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite astfel:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

## Soluție

Pentru a arăta că  $f$  și  $g$  admit primitive vom folosi „metoda primitivelor aproximative” (G.M. nr. 1/ 1991). Dată fiind o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se pornește cu o primitivă aproximativă a ei, adică  $H: J \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel încât  $H'(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\forall x \in J$ . Dacă funcția  $g$  are primitiva  $G$ , rezultă că  $f$  admite pe  $J$  primitiva  $H - G$ . Să demonstrăm că funcția  $f$  de la a) are primitive.

$$\text{Fie } H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ derivabilă pe } \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = 0 \text{ și } H'(x) = f(x) + g(x).$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ este continuă pe } \mathbb{R} \left( \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0 = g(0) \right), \text{ deci primitivabilă.}$$

Rezultă că  $f(x) = H'(x) + (-g(x))$  admite primitive (ca sumă de funcții primitivabile). În mod asemănător se arată că  $g$  are primitive.

### Observație

Pornind de la aceste funcții putem construi alte funcții primitivabile conform teoremei următoare.

#### ◆ Teorema 1

Fie  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Dacă  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  are primitive și este mărginită inferior sau superior atunci funcția  $f \cdot g$  are primitive.

$$3. h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \cdot \cos x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ are primitive.}$$

### Soluție

Funcția  $h$  are primitive fiind produsul dintre funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$ , care este continuă

și funcția  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , care admite primitive și este mărginită.

$$4. \text{ Fie } f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \begin{cases} e^x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}. \text{ Să se determine } \alpha \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f \text{ să aibă}$$

primitive.

### Soluție

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases} \text{ are primitive dacă și numai dacă } \alpha = 0.$$

Atunci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = g(x) \cdot h(x)$  are primitive dacă și numai dacă  $\alpha = 0$ .

### Observație

Funcțiile  $f$  și  $g$  de la exemplul 2 pot fi generalizate. Astfel, funcțiile

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{a}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \cos \frac{a}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ au primitive } \forall a \in \mathbb{R}.$$

5. Alt exemplu de funcție discontinuă care este primitivabilă este:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Soluție**

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ este o primitivă a lui } f(x).$$

$F(x)$  este derivabilă în  $x=0$  ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 0 = f(0)$ ), deci pe  $\mathbb{R}$ , și  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### FIȘĂ DE LUCRU

Fie  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I$  este un interval. **Funcția  $g$  admite primitive pe  $I$**  dacă există funcția  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile :

- $G$  este derivabilă pe  $I$
- $G'(x) = g(x)$ , oricare ar fi  $x$  din  $I$ .

1. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ . Verificați dacă funcția

$F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$  este o primitivă a funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ . Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

3. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$ . Determinați primitive  $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , a funcției  $f$  pentru care  $F(1) = 3$ .

4. Să se calculeze integralele

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^5 dx ; \int_{-3}^3 x^7 dx ; \int_{-2}^1 \frac{x^2+1}{x} dx ; \int_{-1}^1 e^x dx ; \int_{-4}^4 \frac{1}{x^2-25} dx ; \int_{-1}^3 \frac{1}{x^2+3} dx ; \int_0^{\pi} \sin x dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx ;$$

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx ; \int_{-3}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} dx ; \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx ; \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx ;$$

$$\int_0^1 (3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}) dx ; \int_1^0 \left( x^5 - 4x^3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx ; \int_4^5 \left( \frac{6}{x^2-9} - \frac{3}{\sqrt{x^2-9}} \right) dx$$

## 11.2. Calcul integral

*Tabel de primitive:*

$$1. \int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \\ \ln|x| + C \end{cases}$$

$$2. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\text{In particular } \int e^x dx = e^x + C$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$9. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, a \neq 0;$$

$$10. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, a > 0$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, a \neq 0$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$$

**Formula de integrare prin parti**

**Teorema:** Dacă  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile cu derivate continue atunci:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

**Observatie:** Aceasta formula poate fi aplicata cu succes in mai multe situatii. Precizam doua dintre cele mai des intalnite.

I.  $f'$  este  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  si  $g$  este  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sau o functie polinomiala.

**Exemplu:**

$$1) \int (4x+5)e^x dx \quad 2) \int \cos^2 x dx$$

**Solutie:**

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$$

$$1. \quad g(x) = 4x+5 \Rightarrow g'(x) = 4$$

Atunci

$$\int (4x+5)e^x dx = e^x(4x+5) - \int e^x \cdot 4 dx = e^x(4x+5) - 4e^x + c = e^x(4x+5-4) + c = e^x(4x+1) + c$$

$$2. \quad f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\sin x$$

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \int (\sin x)' \cdot \cos x dx = \sin x \cos x - \int \sin x \cdot (\cos x)' dx = \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx = \\ &= \sin x \cos x + x - I + c \end{aligned}$$

$$I = \sin x \cos x + x - I + c$$

$$I = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

II.  $f'$  este o functie polinomiala si  $g(x) = \ln^k x$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$

**Exemple:**

$$1) \int x^2 \ln x dx$$

$$2) \int x \ln^2 x dx$$

**Soluție:**

$$1. f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$2) f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \ln^2 x \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$$

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \cdot \frac{2}{x} \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - 2 \int \ln x = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - 2 \int x' \ln x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

**Formula schimbării de variabilă**

**Teorema:** (Prima formulă de schimbare de variabilă)

Fie  $I, J \subset \mathbb{R}$  intervale. Dacă  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  este primitivabilă și  $\varphi: I \rightarrow J$  este derivabilă atunci  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  admite pe  $I$  primitivă  $F \circ \varphi$ , unde  $f$  este o primitivă oarecare a funcției  $f$ , adică:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left\{ \int f(x) dx \right\}_{x=\varphi(t)}$$

**Exemplu:**

$$1. \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$2. \int x(x^2-1)^{100} dx$$

**Soluție:**

Facem substituția  $x^2=t$  de unde  $2x dx=dt$

Atunci

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \int \frac{x}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \arctg t + c = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + c$$

2. Facem substituția  $x^2-1=t$  de unde  $2x dx=dt$  adică  $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2x}$ . Atunci:

$$\int x(x^2 - 1)^{100} dx = \int xt^{100} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t^{100} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{101}}{101} + c = \frac{t^{101}}{202} + c$$

### Teorema (Formula de schimbare de variabilă)

Fie  $I, J \subset \mathbb{R}$  intervale. Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitive,  $\varphi: I \rightarrow J$  este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe  $I$  atunci  $f$  admite pe  $J$  primitivă  $G \circ \varphi^{-1}$  unde  $G$  este o primitivă pentru  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  iar  $\varphi^{-1}$  este inversa funcției  $\varphi$ . Deci:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

### Exemplu

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

Această integrală poate fi rezolvată în două moduri:

1. Cu ajutorul integrării prin parti

2. Facând substituția  $x = \text{sht}$ , unde  $\text{sht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  sinus hiperbolic deci  $dx = \text{cht}$ . Avem

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\text{sht}^2 t} \cdot \text{cht} dt = \int \sqrt{\text{cht}^2 t} \cdot \text{cht} dt = \int \text{cht}^2 t dt = \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + 2t \right) + c = \\ &= \frac{t}{2} + \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} + c \end{aligned} \quad (1)$$

Din  $x = \text{sht} \Rightarrow e^t = x + \sqrt{x^2 + 1}$  de unde  $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

Și înlocuind în (1) obținem

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + c$$

### Calculul prin recurență a unor integrale

Pentru exemplificare vom considera:

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx, \quad n \geq 1, a \neq 0$$

Observăm ca: 
$$I_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + c$$

Dorim să găsim o relație de recurență adică o formulă care exprimă  $I_n(x)$  în funcție de  $I_{n-1}(x)$ . Utilizând această relație de recurență din  $I_1(x)$  vom putea deduce valoarea lui  $I_2(x)$ , din  $I_2(x)$  va rezulta  $I_3(x)$  și așa mai departe.

Pentru  $n \geq 2$  vom avea:

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \left[ \int \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \right]$$

$$I_n(x) = \frac{1}{a^2} \left[ I_{n-1}(x) - \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx \right]$$

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

Vom face schimbarea de variabilă  $x^2 + a^2 = t$ . Atunci  $2x dx = dt$ .

Revenind obținem

$$f(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{2(1-n) \cdot (x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$I_n(x) = \frac{1}{a^2} \left[ I_{n-1}(x) - \frac{x}{2(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{2(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} dx \right]$$

$$I_n(x) = \frac{1}{a^2} I_{n-1}(x) - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1}(x)$$

$$I_n(x) = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1}(x)$$

### Primitivele funcțiilor rationale

I. Mai întâi se scrie funcția ratională sub forma unei sume în care pot interveni un polinom și funcții rationale de forma:

$$(1) \frac{A}{(x-a)^n}, a, A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$(2) \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}; B, C, b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4c < 0, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

O funcție rațională  $f$  este câtul a două funcții polinomiale  $P$  și  $Q$ , adică  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Dacă  $\text{grad } P \geq \text{grad } Q$  vom putea efectua împărțirea și vom obține:

$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$  în care câtul  $C(x)$  este polinom iar restul  $R(x)$  este tot un polinom cu  $\text{grad } R < \text{grad } Q$ . Aici funcția rațională  $f$  se va scrie

$$f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

În cazul în care  $\text{grad } P < \text{grad } Q$  vom scrie  $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$  unde  $R(x) = P(x)$

Pentru a scrie acum  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  ca o sumă de fracții de forma (1) și (2), vom proceda în felul următor:

1. Dacă polinomul  $Q$  are rădăcina reală "a" având ordinul de multiplicitate  $k$  în descompunerea

lui  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  vom avea termenii

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

2. Dacă polinomul  $Q$  are rădăcinile complexe  $\alpha \pm i\beta$  având ordinul de multiplicitate  $m$  atunci în

descompunerea lui  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  vom avea fracțiile:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + bx + c)^m}$$

unde  $b = -2\alpha$ ,  $c = \alpha^2 + \beta^2$ . În final se vor determina constantele  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2$ ,

II. Acum ca funcția rațională este scrisă ca sumă dintre un polinom și funcții raționale de forma (1) și (2) pentru a calcula primitiva unei funcții raționale va trebui să știm să calculăm primitivele funcțiilor polinomiale (ceea ce este clar dacă utilizăm liniaritatea operatorului de primitivare și prima formulă din tabelul de primitive) și primitivele funcțiilor raționale de forma (1) și forma (2).

Vom avea:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{1}{t^n} dt = A \int t^{-n} dt = A \begin{cases} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c & \text{dacă } n \neq 1 \\ \ln|t| + c & \text{dacă } n = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c & \text{dacă } n \neq 1 \\ A \ln|x-a| + c & \text{dacă } n = 1 \end{cases}$$

Apoi

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} dx = \int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}\right]^n} dx$$

Cum  $b^2-4c < 0$  vom avea  $\frac{4c-b^2}{4} > 0$  și vom putea nota  $\frac{4c-b^2}{4} = k^2$

Vom face schimbarea de variabilă  $x + \frac{b}{2} = t$ . Atunci  $dx = dt$ . Revenind avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} dx &= \int \frac{B\left(t-\frac{b}{2}\right)+C}{(t^2+k^2)^n} dt = \\ &= B \int \frac{t}{(t^2+k^2)^n} dt + \left(C - \frac{Bb}{2}\right) \int \frac{1}{(t^2+k^2)^n} dt \end{aligned}$$

Prima integrală se va calcula cu schimbarea de variabilă  $t^2+k^2=u$  iar a doua prin recurență.

**Exemple:**

$$\int \frac{10x^3 - 4x^2 - 34x + 12}{x^4 - 10x^2 + 9} dx \quad x \in (3, +\infty)$$

Numitorul se descompune în factori ireductibili

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

Deci putem descompune fracția în fracții simple astfel:

$$\frac{10x^3 - 4x^2 - 34x + 12}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} \quad (1)$$

Înmulțind relația (1) cu  $x-1$  obținându-se

$$\frac{10x^3 - 4x^2 - 34x + 12}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = A + (x-1) \left( \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} \right)$$

dupa care trecem la limita când  $x \rightarrow 1$  și găsim  $A=1$

Procedând la fel obținem  $B=2$ ;  $C=3$ ;  $D=4$ .

Descompunerea în funcții rationale simple este

$$\frac{10x^3 - 4x^2 - 34x + 12}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x+3}$$

integrând obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{10x^3 - 4x^2 - 34x + 12}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx + \\ &+ \int \frac{4}{x+3} dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + 4\ln|x+3| + c \end{aligned}$$

### *Primitivele unor funcții irrationale*

Vom nota în continuare cu  $R$  o funcție rațională ce poate fi de mai multe variabile.

I. Primitivarea funcției:  $f(x) = R(x, \sqrt[n]{ax+b})$

se reduce la primitivarea unei funcții rationale făcând schimbare de variabilă

$$\sqrt[n]{ax+b} = t \text{ unde } n = \text{c.m.m.m.c. } \{n_i\}_{i=1}^p$$

$$\text{Mai notăm ca } x = \frac{1}{a}(t^n - b) \text{ și } dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

**Exemplu:**

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Facem substituția  $x=t^6$  deci  $dx=6t^5dt$ .

Avem:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^5}{t^2(t+1)} dt = 6 \int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c \end{aligned}$$

$$\text{unde } t = \sqrt[6]{x}$$

$$\text{Deci } I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

$$f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

I. Dacă

vom proceda asemanator utilizand schimbarea de variabila.

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \text{unde } n = \text{c.m.m.m.c.} \{n_i\}_{i=1}^p$$

**Exemplu:**

$$\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Facem substitutia  $\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

Deci  $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$

Atunci:  $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 4 \int \frac{t^4 + t^2}{(1-t)^4 (1+t)^4} dt$

Descompunem fractia in fractii simple si notam  $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  si obtinem

$$\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} (x-2) + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

II.  $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$  Vom calcula  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Avem cazurile:

(A)  $\Delta = 0$  atunci pentru ca radicalul sa aiba sens va rezulta  $a > 0$  si

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

atunci

(B)  $\Delta < 0$ , caz in care  $a > 0$ . Vom face schimbarea de variabila  $\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x = t$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t(b + 2t\sqrt{a}) - (t^2 - c) \cdot 2\sqrt{a}}{(b + 2t\sqrt{a})^2} dt \Rightarrow \frac{2tb + 2t^2\sqrt{a} + 2c\sqrt{a}}{(b + 2t\sqrt{a})^2} dt$$

(C)  $\Delta > 0$  Primitivele se caută pe un interval pe care radicalul este definit și pe care nu se anulează numitorul fracției. Cum

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)}$$

$$R\left(x, |x - x_1| \sqrt{a \frac{x - x_2}{x - x_1}}\right)$$

și am redus problema la cazul II, deci facem substituția

$$\sqrt{a \frac{x - x_2}{x - x_1}} = t$$

**Exemplu:**

$$1) \int \sqrt{x^2} dx$$

$$2) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$3) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}, x > 4$$

**Soluție:**

1)  $\Delta = 0$ . Cum  $\sqrt{x^2} = |x|$ , vom scrie  $|x| = \varepsilon \cdot x$ , unde  $\varepsilon$  este semnul lui  $x$ . Atunci

$$\int \sqrt{x^2} dx = \int |x| \cdot dx = \int \varepsilon x dx = \varepsilon \cdot \frac{x^2}{2} + c = \varepsilon \cdot x \cdot \frac{x}{2} + c = \frac{x|x|}{2} + c$$

2)  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ . Vom face schimbarea de variabile

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + x = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t(2t - 1) - (t^2 - 1) \cdot 2}{(2t - 1)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t - 1)^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t - 1)^2} dt = \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt$$

$$\frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t-1} + \frac{C}{(2t-1)^2}$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 2t + 2 = A(2t-1)^2 + Bt(2t-1) + Ct$$

$$\Rightarrow A = 2, B = -3, C = 3$$

Dar

$$\frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2} = \frac{2}{t} + \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}$$

Deci

de unde

$$\int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt - 3 \int \frac{1}{2t-1} dt + 3 \int \frac{1}{(2t-1)^2} dt$$

Daca facem in ultimele doua integrale schimbarea de variabila  $2t-1=u$  ( $2dt=du$ ) obtinem

$$\int \frac{1}{2t-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln|2t-1|$$

$$\int \frac{1}{(2t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{2u} = \frac{1}{2(2t-1)}$$

deci

$$\int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2} dt = 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + c$$

In final avem

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 2 \ln|x + \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2} \ln|2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| - \frac{3}{2(2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)} + c$$

3)  $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ ;  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$  si facem schimbarea de variabila

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = t$$

$$\Rightarrow x = \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$x - 2 = \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 1} - 2 = \frac{1}{t^2 - 1}; \quad x - 1 = \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 1} - 1 = \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}$$

Atunci

$$= \int \frac{t^2 - 1}{t^2} \cdot \frac{t^2 - 1}{1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt = -2 \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$$

### Primitivele funcțiilor trigonometrice

Notăm cu  $R(u, v)$  o funcție rațională în variabile  $u$  și  $v$ . Pentru funcția  $f(x) = R(\sin x, \cos x)$  se face

substituația  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  și problema revine la calculul primitivei unei funcții raționale. Să mai notăm că

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Să precizăm că se aplică formula a II-a de schimbare de variabilă. Acest lucru este

posibil pe un interval pe care funcția  $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  este bijectivă.

Prin urmare această metodă se aplică pe intervale de forma  $(2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

### Exemplu

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}$$

**Soluție :**

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{3+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$$

Dacă dorim o primitivă pe  $\mathbb{R}$  calculăm saltul acestei "primitive" în punctele de forma  $(2k+1)\pi$ :

$$S_k = \lim_{\substack{x \rightarrow (2k+1)\pi \\ x > (2k+1)\pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \lim_{\substack{x \rightarrow (2k+1)\pi \\ x < (2k+1)\pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Vom avea:

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} + C; & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}} + C; & x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

Calculul primitivei poate fi simplificat în următoarele cazuri:

1. Dacă  $R(-u, v) = -R(u, v)$  vom face substituția  $\cos x = t$
2. Dacă  $R(u, -v) = -R(u, v)$  vom face substituția  $\sin x = t$
3. Dacă  $R(-u, -v) = -R(u, v)$  vom face substituția  $\operatorname{tg} x = t$

**Exemplu**

$$1) \int \sin^3 x \cos^3 x dx,$$

$$2) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

**Soluție:**

$$1) R(u, v) = u^3 v^2; R(-u, v) = (-u)^3 v^2 = -u^3 v^2 = -R(u, v)$$

Prin urmare facem substituția  $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ .

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x (-\sin x) dx = -\int (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$2) R(u, v) = \frac{u}{u+v} \quad R(-u, -v) = \frac{-u}{-u-v} = \frac{u}{u+v} = R(u, v)$$

Vom face substituția  $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} dx = \int \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\frac{t}{(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow t = At^2 + A + Bt^2 + Ct + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ C+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=1-B \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{t}{(t+1)(1+t^2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t+1}{t^2+1}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2+2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |tgx+1| + \frac{1}{4} \ln(tg^2x+1) + \frac{1}{2} x + C$$

### FIȘĂ DE LUCRU – Integrare prin părți

1. Să se calculeze următoarele integrale definite:

a)  $\int_0^1 x e^x dx$ ; b)  $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ; c)  $\int_1^e \ln x dx$ ; d)  $\int_1^e x \ln x dx$ ; e)  $\int_0^\pi x \sin x dx$ ;

f)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ ; g)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ ; h)  $\int_0^1 \ln(x^2+1)$ ; i)  $\int_0^\pi e^x \sin x dx$ ; j)  $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$

k)  $\int_0^1 (3x-2)e^x dx$ ;

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$

a) Arătați că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ ;

b) Calculați  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

3. Calculați a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (3t-2)e^t dt}{x}$ ;

4. Calculați  $\int_{-1}^1 |x| e^x dx$ ;

5. Fie  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Să se calculeze  $I_0, I_1$ ;

b) Să se demonstreze că  $I_n = e - n I_{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

6. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x^2+9}$

a) Să se arate că  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}} dx$ ;

b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+9} \cdot f(x) dx$ .

7. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)e^x$ , respectiv  $g(x) = (x+2)e^x$ .

a) Demonstrați că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ ;

b) Calculați  $\int_{-1}^1 g(x) dx$ .

8. Demonstrați următoarea egalitate  $\int_1^e e^x \ln x dx + \int_1^e \frac{e^x}{x} dx = e^e$ .

### Rezolvarea fișei de lucru

1)

$$a) \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile, cu derivatele continue

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1; g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x;$$

b)  $\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x /_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2$  (integrala din membrul drept a fost rezolvată la punctul a)

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile, cu derivatele continue

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x; g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ ; se aplică de două ori integrarea prin părți;

c)  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$ ;

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile, cu derivatele continue

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x /_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = 1$$

d)  $\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x /_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x /_1^e - \frac{x^2}{4} /_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$ ;

Funcțiile  $f$  și  $g$  îndeplinesc condițiile teoremei integrării prin părți;

e)  $\int_0^\pi x \sin x dx = -x \cos x /_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1; g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ ;

f)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 /_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}; g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = \ln x$ ;

h)  $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) /_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \ln 2 - 2 + 2 \arctan x /_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ .

$f(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}; g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$ ;

i)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x /_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \left( e^x \cos x /_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \right)$

Se aplică de două ori metoda integrării prin părți

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x; g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$  (prima dată)

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x; g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$  (pentru integrala din membrul drept);

Rezultă că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ ;

j) Se utilizează procedeul de mai sus

$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = x \sqrt{x^2 + 1} /_0^1 - \int_0^1 x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ;

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

Rezultă că  $2 \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ , de unde rezultatul final:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$$

2) a) Se demonstrează că funcția este continuă pe domeniul de definiție. În  $x=0$ ,  $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 1$ . În rest, funcția este continuă, fiind compunere de funcții elementare;

b) Se aplică proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare

$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$  (prima este elementară, a doua s-a calculat mai sus);

3) a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2}$ ; se poate calcula integrala și apoi limita sau se calculează direct limita, fiind îndeplinite condițiile regulii lui l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

4)  $\int_{-1}^1 |x|e^x dx$ ; După explicitarea modulului

$\int_{-1}^1 |x|e^x dx = \int_{-1}^0 -xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$ . Prima, prin integrare prin părți, este egală cu  $1 - \frac{2}{e}$ , iar a doua a fost calculată la ex.1, punctul a);

5) Este un exercițiu prezent pe variantele model pentru examenul de Bacalaureat.

a)  $I_0$  este elementară, iar  $I_1$  a mai fost calculată;

b)  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x /_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  (s-a aplicat integrarea prin părți,  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ ;  $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ );

7) a) Funcția  $f$  este derivabilă pe domeniul de definiție și, utilizând regula de derivare a produsului a două funcții, se demonstrează că  $f'(x) = g(x)$ ;

b) Integrala se poate calcula direct, prin părți, sau folosind punctul precedent,  $\int_{-1}^1 g(x) dx = f(x) /_{-1}^1 = 2e$ ;

8)  $\int_1^e e^x \ln x dx + \int_1^e \frac{e^x}{x} dx = e^e$ . Integralele, separat, nu se pot calcula.

Pentru prima:  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ ;  $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ .

$\int_1^e e^x \ln x dx = e^x \ln x /_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x} dx$ , de unde rezultă relația cerută.

## TEST DE EVALUARE

### Subiect I

1. Arătați că  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 0,5) = \frac{3}{4}$ .
2. Se consideră  $x_1, x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - x + a = 0$ , unde  $a$  este număr real. Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care  $x_1 x_2 - 1 < 0$ .
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x^2 - 6x + 5} = x - 1$ .
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3.
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$ ,  $A(-1,-1)$ ,  $B(4,4)$ . Demonstrați că punctele  $A, O$  și  $B$  sunt coliniare.
6. Arătați că  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$ , pentru orice număr real  $x$ .

### Subiect II

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Arătați că  $\det A = 16$ .
  - b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $AB = aI_2$ .
  - c) Demonstrați că  $\det(xA + \frac{1}{x}B) \geq 49$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 5xy + 15(x + y) + 42$ .
  - a) Arătați că  $(-2) \circ (-2) = 2$ .
  - b) Demonstrați că  $(x) \circ y = 5(x + 3)(y + 3) - 3$ .
  - c) Determinați numărul real  $x$ , pentru care  $(x - 3) \circ (x - 3) \circ (x - 3) = 197$ .

### Subiect III

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ .
  - a) Arătați că  $f^f(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{(x^2+3)(x^2+3)}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
  - b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
  - c) Arătați că  $-1 \leq f(x) + f(y) \leq \frac{1}{3}$ , pentru orice  $x$  și  $y$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ .
  - a) Arătați că  $\int_0^1 (e^x + 1)f(x) dx = 1$ .
  - b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{3}{2}$ .
  - c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{e^x f(x)}$ .

## REZOLVAREA TESTELOR DE TIP BAC

### Varianta 1

#### Subiectul I

- Arătați că numărul  $n = \sqrt{8}(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$  este pătratul unui număr natural.
- Determinați numărele reale  $a$ , știind că punctul  $A(a, a)$ , aparține graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2 - x^2$ .
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^x + 5^{x+1} = 30$
- Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3} \dots \sqrt{49}\}$ , acesta să fie număr natural.
- În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,1)$  și  $B(3,5)$ . Calculați distanța de la punctul  $O(0,0)$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
- Arătați că  $\sqrt{2} \sin 45^\circ - (\sin 30^\circ + \sin 60^\circ) = 0$ .

#### Subiectul al II-lea

- Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
  - Arătați că  $\det A = 5$ .
  - Arătați că, dacă  $A + B(x) = 5I_2$ .
  - Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\det(B(x) \cdot B(x) - I_2) = 0$ .
- Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - 9(x+y) + 90$ .
  - Arătați că  $10 \circ 8 = 8$ .
  - Demonstrați că  $x \circ y = (x-9)(y-9) + 9$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
  - Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $n \circ n \leq 10$ .

#### Subiectul al III-lea

- Se considera funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ .
  - Calculați derivata funcției.
  - Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției.
  - Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în  $x=2$ .
- Se considera funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$ .
  - Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - \frac{1}{e^x}) dx = 0$ .
  - Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .
  - Demonstrați că orice primitive a funcției  $f$  este concave pe  $(-\infty, 0]$ .

## Varianta 2

### SUBIECTUL I

1. Calculați  $\sqrt{4} + \log_2 2 + e^0 - 3^2$ .
2. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ , să se determine  $a \in \mathbb{R}$  știind că punctul  $A(-1, a)$  aparține graficului funcției.
3. Rezolvați ecuația  $2^x + 2^{x+2} = 10$ .
4. Calculați  $A_6^2 - C_5^4$ .
5. Determinați  $a \in \mathbb{R}$ , știind că distanța dintre punctele  $A(1, 2)$  și  $B(a, 5)$  este egală cu 5.
6. Fie  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(-1, 5)$ . Să se calculeze valoarea expresiei  $E = 2AB^2 + 3BC^2 - 4AC^2$ .

### SUBIECTUL II

1. Fie mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = c + d = 1 \right\}$ .
  - a) Scrieți o matrice din mulțimea  $A$ ;
  - b) Arătați că inversa matricei  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  aparține mulțimii  $A$ .
  - c) Demonstrați că dacă  $X, Y \in A$  atunci  $XY \in A$ .
2. Pe mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  se definesc legile de compoziție:  
 $x * y = x + y + 4$  și  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ 
  - a) Arătați că  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
  - b) Arătați că dacă  $x \circ y = -4$  atunci  $x = -4$  sau  $y = -4$ .
  - c) Rezolvați ecuația  $(x \circ x) \circ x = (x * x) * x$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ .

### SUBIECTUL III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax, & x \in (-\infty, 0) \\ x + \ln x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ 
  - a) Arătați că  $f$  este continuă.
  - b) Determinați mulțimea valorilor numărului real  $a$  pentru care  $f$  este crescătoare.
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(x+1))$ .
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x + 3}$ .
  - a) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .
  - b) Calculați  $\int_0^1 x f'(x) dx$ .
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$ .

### Varianta 3

#### Subiectul I

- 5p 1. Arătați că  $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72} = 11$ .
- 5p 2. Să se calculeze  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2018)$  știind că  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x - 2$ .
- 5p 3. Să se rezolve în **Recuația**  $\log_3(2x - 1) = 1$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 10% un obiect costă 90 lei. Care a fost prețul înainte de ieftinire?
- 5p 5. Fie punctele  $A(a, 3)$  și  $B(1, 5)$ . Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  știind că  $M(3, 4)$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 6. Știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și  $x$  este unghi ascuțit, să se calculeze  $\operatorname{tg} x$ .

#### Subiectul II

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a. Să se calculeze  $\det A$ .
- 5p b. Să se arate că  $A^2 = 3A$ .
- 5p c. Să se verifice dacă  $(A + I_2)^3 = 21 \cdot A + I_2$ .
2. În  $\mathbf{R}[X]$  se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ , cu  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- 5p a. Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 = -1$ .
- 5p b. Pentru  $a = 1$  să se calculeze  $b \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ .
- 5p c. Pentru  $a = 1$  și  $b = -1$  să se calculeze  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .

#### Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a. Să se verifice dacă  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ .
- 5p b. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- 5p c. Să se calculeze ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ .
2. Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \leq 0 \\ x\sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ .
- 5p a. Să se studieze dacă funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbf{R}$ .
- 5p b. Să se calculeze  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ .
- 5p c. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = f(x) - 1$  în jurul axei  $Ox$ .

#### Varianta 4

##### Subiectul I

- 5p 1. Arătați că  $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72} = 11$ .
- 5p 2. Să se calculeze  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2018)$  știind că  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x - 2$ .
- 5p 3. Să se rezolve în **Recuația**  $\log_3(2x - 1) = 1$ .
- 5p 4. După o ieftinire cu 10% un obiect costă 90 lei. Care a fost prețul înainte de ieftinire?  
Fie punctele  $A(a, 3)$  și  $B(1, 5)$ . Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  știind că  $M(3, 4)$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 5.
- 5p 6. Știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și  $x$  este unghi ascuțit, să se calculeze  $\operatorname{tg} x$ .

##### Subiectul II

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a. Să se calculeze  $\det A$ .
- 5p b. Să se arate că  $A^2 = 3A$ .
- 5p c. Să se verifice dacă  $(A + I_2)^3 = 21 \cdot A + I_2$ .
2. În  $\mathbf{R}[X]$  se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ , cu  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- 5p a. Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 = -1$ .
- 5p b. Pentru  $a = 1$  să se calculeze  $b \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ .
- 5p c. Pentru  $a = 1$  și  $b = -1$  să se calculeze  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .

##### Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a. Să se verifice dacă  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ .
- 5p b. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- 5p c. Să se calculeze ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ .
2. Fie funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \leq 0 \\ x\sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ .
- 5p a. Să se studieze dacă funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbf{R}$ .
- 5p b. Să se calculeze  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ .
- 5p c. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = f(x) - 1$  în jurul axei  $Ox$ .

*Notă: Timp de lucru: 3 ore, se acordă 10 puncte din oficiu.*

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

### Varianta 5

#### SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p.1) Arătați că  $n = \sqrt{27}(1 - \sqrt{3}) - 3\sqrt{3}$  este număr întreg.

5p.2) Aflați două numere naturale  $a, b$ , știind că  $a + b = 2019$  și  $a \cdot b = 2018$ .

5p.3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - 3} - x = -1$

5p.4) După o ieftinire cu 15% prețul unui obiect devine 2550 lei. Care a fost prețul său inițial?

5p.5) În reperul cartezian

$xOy$  se consideră punctul  $A(2, 3)$ ; Aflați coordonatele unui punct  $M$  situat pe axa  $Ox$ , cu abscisa pozitivă, astfel ca distanța  $AM = 5$ . 5p.

6) Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ ; Dacă  $\sin B = \frac{1}{2}$ , aflați  $\operatorname{ctg} C$ .

#### SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. Se dă matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a-2 & 2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculați  $A(-1) + A(0)$ ;

b) Determinați matricea  $X$  astfel încât  $2A(-1) + X = B$

c) Calculați  $A(0) \cdot B$ .

2. Se consideră polinoamele  $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$ , unde  $m$  este număr real

a) Pentru  $m = 4$ , arătați că  $f(4) = 8$

b) Determinați numărul real  $m$  pentru care rădăcinile polinomului  $f$  verifică relația  $x_1 + x_2 = x_3$

c) Dacă  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$ , arătați că  $f$  se divide cu  $x - 3$ .

#### SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ;

a) Calculați derivata funcției date.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

c) Calculați asimptota orizontală la  $\infty$

2. Se consideră funcția  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ;

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$ .

b) Calculați  $\int_1^2 x f(x) dx$ .

c) Calculați  $\int_1^2 e^x f^2(x) dx$ .

## Varianta 6

### SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Se consideră ecuația  $x^2 - (3m-2)x - m + 1 = 0$  cu rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$ ,  $m$  parametru real. Să se determine valoarea lui  $m$ , astfel încât să fie satisfăcută relația:  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \frac{3}{2}$ .
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $10^{\lg x} = 10x - 3$ .
3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că punctele  $A(1, a)$  și  $B(b, 1) \in$  dreptei de ecuație  $x - 2y - 3 = 0$ .
4. Să se verifice că  $C_6^1 + C_6^3 + C_6^5 = 2^5$ .
5. După o scumpire cu 25% un produs costă la vânzare 520 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.
6. În triunghiul  $ABC$  se cunosc  $AB=3$ ,  $AC=\sqrt{2}$  și  $BC=\sqrt{3}$ . Să se calculeze  $\cos A$ .

### SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. În mulțimea  $M_3(\mathbb{R})$  considerăm matricele :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Să se calculeze determinantul matricei  $A + I_3$
  - b) Să se verifice relația  $A^2 = 2A - B$ .
  - c) Calculați inversa matricei  $A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = 2xy - 2x - 2y - 6$ .
  - a) Să se verifice că  $x * y = 2(x-1)(y-1) - 8$ .
  - b) Să se calculeze  $(x * 1) - (1 * y)$ .
  - c) Să se rezolve ecuația  $x * x = -6$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .

### SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .

- a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- b) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .
- c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(2, 1)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ ,  $g(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ .

- a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

- b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției

$h: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $h(x) = (x+1)^2 \cdot g(x)$ , axa  $ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=2$ .

